Chapitre 7

Localisation tri dimensionnelle

7.1. Introduction

Aux chapitres précédents nous avons étudié l'acquisition d'informations tridimensionnelles (3D) grâce à la vision. A quoi pourraient bien servir ces informations, ou ces données 3D ? Le premier exemple d'utilisation de telles données est fourni par un robot exécutant une tâche d'assemblage. Afin d'assembler deux objets, un robot doit être capable de *localiser* chaque objet par rapport à son référentiel de travail. Il pourra alors seulement saisir un objet et l'assembler avec l'autre objet. Le deuxième exemple est fourni par un robot mobile qui doit se rendre quelque part pour une opération de chargement/déchargement. Lorsque le robot se trouve à proximité du lieu où l'opération doit être effectuée, sa position par rapport aux objets environnants n'est pas connue. Il s'agit une fois de plus de localiser ces objets par rapport au référentiel du robot. Enfin, le troisième exemple est fourni par la robotique chirurgicale assistée par ordinateur. Il s'agit de mettre "en correspondance" des examens (radiologiques, échographiques, etc.) effectués lors de l'intervention (per-opératoires) avec des examens effectués avant l'intervention (pré-opératoires), [124].

D'abord nous allons décrire formellement le problème de localisation et ensuite nous allons proposer quelques solutions. Les solutions qui permettent de résoudre le problème de localisation 3D/3D peuvent également être utilisées pour résoudre le problème de calibration entre une caméra et un robot, lorsque la caméra est montée sur l'organe terminal du robot [91]. Nous verrons également que le problème de localisation est intimement lié au problème de reconnaissance qui sera traité indépendamment au chapitre 9. Le problème de reconnaissance possède quelques similarités avec le problème de mise en correspondance stéréo. Quelques-unes des solutions que nous avons proposées pour résoudre le problème de mise en correspondance stéréo pourront être utilisées pour résoudre le problème de reconnaissance.

7.2. Définition du problème

Soit un ensemble de points 3D dans le référentiel d'un capteur visuel. Les coordonnées de ces points ont été obtenues, par exemple, par stéréo passive ou active. Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ces points. Par ailleurs, soit un ensemble de points à la surface d'un objet qui sont décrits dans le référentiel propre à cet objet : $M_1, M_2, \ldots, M_n$, figure 7.1. Si le capteur est en train d'observer l'objet en question, les points C_i correspondent aux points M_i. Il s'agit purement et simplement du **même** ensemble de points décrits dans deux référentiels différents.

La transformation qui permet de passer du repère de l'objet à celui du capteur est composée d'une matrice de rotation $\mathbf{R}$ et d'un vecteur de translation $\mathbf{t}$. Nous pouvons donc écrire pour tout i (soit pour toute mise en correspondance $C_i \leftrightarrow M_i$) :

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{R}\ \mathbf{m}_i + \mathbf{t}$$

$\mathbf{m}_i$ étant le vecteur associé au point M_i. En pratique, à cause du bruit, il n'y aura pas de superposition parfaite entre les points objet et les points capteur. La distance entre un point objet transformé et le point correspondant dans le repère capteur sera :

$$d_i = ||\mathbf{c}_i - \mathbf{R}\ \mathbf{m}_i - \mathbf{t}||$$

En sommant les carrés de ces distances on obtient un critère quadratique :

$$Q = \sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{c}_i - \mathbf{R}\ \mathbf{m}_i - \mathbf{t}||^2 \qquad [7.1]$$

Le problème de localisation 3D peut maintenant être défini de la façon suivante : sous l'hypothèse d'une mise en correspondance terme à terme de n points, trouver la transformation rigide (rotation et translation) qui minimise le critère fourni par l'équation [7.1].

En pratique la minimisation du critère Q est conditionnée par :

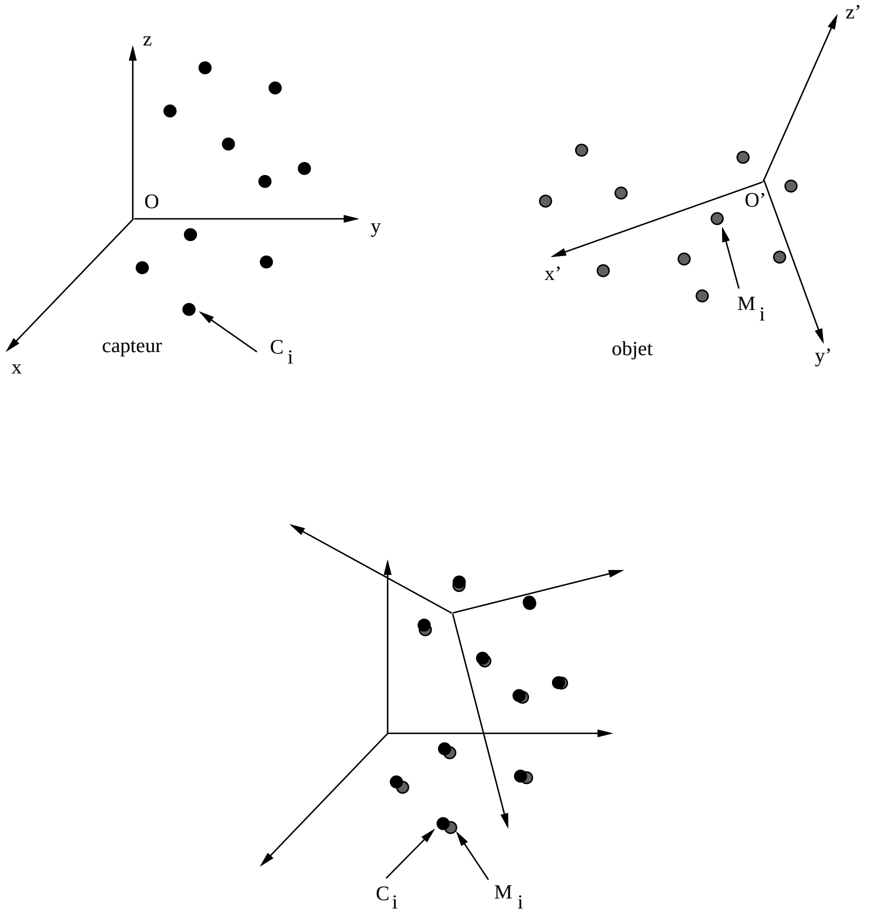

Figure 7.1. *Le même ensemble de points est décrit dans deux référentiels différents. En faisant surperposer les points on peut déterminer la rotation et la translation entre les deux référentiels.*

- les caractéristiques visuelles ne sont pas toujours des points. On aura à traiter aussi bien des points que des segments de droite, des facettes planes ou des primitives surfaciques ;

- la représentation matricielle de la rotation n'est pas la plus adéquate pour minimiser le critère Q.

Avant de proposer quelques solutions pour le problème de détermination de la transformation rigide optimale, nous allons décrire les représentations des caractéristiques telles que les droites et les plans ainsi que les expressions analytiques des transformations rigides des droites et des plans. Ensuite nous allons décrire deux représentations pour la rotation, une utilisant le calcul vectoriel et une autre utilisant les quaternions.

7.3. Représentation d'un plan

Un plan 3D peut être écrit sous la forme :

$$ax + by + cz = d$$

Si on impose la contrainte $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, le vecteur $\mathbf{v}$ de coordonnées (a, b, c) normal au plan est de plus unitaire. Pour un point courant M de ce plan on a :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{v} = d$$

d est donc la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur le vecteur $\mathbf{v}$, soit la distance de l'origine O à ce plan, figure 7.2.

Un plan est donc décrit par le couple formé d'un vecteur et d'un scalaire $(\mathbf{v}, d)$. Soit maintenant ce même plan décrit dans un autre repère :

$$\overrightarrow{O'M'} \cdot \mathbf{v}' = d'$$

Le changement de repère étant une rotation et une translation on obtient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'M'} &= \mathbf{R}\ \overrightarrow{OM} + \mathbf{t} \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{R}\ \mathbf{v} \end{aligned}$$

De plus le point M' appartient au plan en question :

$$(\mathbf{R}\ \overrightarrow{OM} + \mathbf{t}) \cdot (\mathbf{R}\ \mathbf{v}) = d'$$

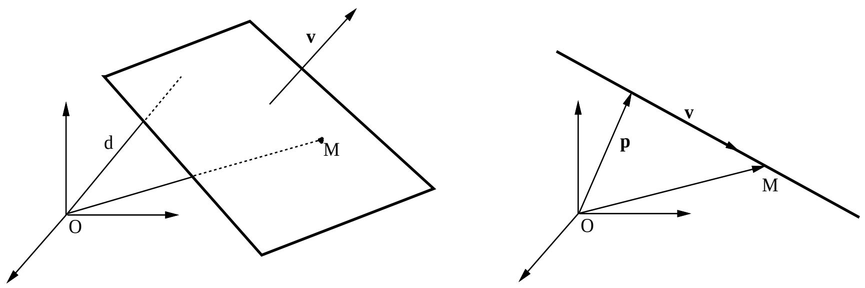

Figure 7.2. *Représentations d'un plan et d'une droite.*

En développant et en tenant compte du fait que la rotation conserve le produit scalaire on obtient les deux équations suivantes :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}\ \mathbf{v} \qquad [7.2]$$

$$d' = d + (\mathbf{R}\ \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t} \qquad [7.3]$$

7.4. Représentation d'une droite

La représentation la plus connue d'une droite est celle qui considère la droite comme l'intersection de deux plans :

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \end{aligned}$$

Cependant cette représentation n'est pas minimale (il faut 8 paramètres) et elle n'est pas non plus très pratique pour décrire la transformation rigide d'une droite. On choisira de préférence la représentation paramétrique :

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{v}$$

$\mathbf{p}$ est le vecteur perpendiculaire à la droite dont la longueur est égale à la distance de l'origine à la droite et $\mathbf{v}$ est le vecteur directeur de la droite, figure 7.2. Par commodité on choisira un vecteur directeur unitaire. On a donc :

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Une droite est donc représentée par un couple de deux vecteurs, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{v}$, soit 4 paramètres car un des vecteurs est unitaire et les deux vecteurs sont perpendiculaires. Comme dans le cas du plan, étudions le changement de repère (rotation et translation) appliqué à une droite. Dans le nouveau repère la droite s'écrit :

$$\overrightarrow{O'M'} = \mathbf{p}' + \lambda' \mathbf{v}'$$

Calculons $\mathbf{p}'$ et $\mathbf{v}'$ en fonction de $\mathbf{p}$, de $\mathbf{v}$, de $\mathbf{R}$ et de $\mathbf{t}$. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'M'} &= \mathbf{R}\ \overrightarrow{OM} + \mathbf{t} \\ &= \mathbf{R}\ \mathbf{p} + \lambda \mathbf{R}\ \mathbf{v} + \mathbf{t} \end{aligned}$$

En identifiant on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{R}\ \mathbf{v} \\ \mathbf{p}' &= \mathbf{R}\ \mathbf{p} + \mathbf{t} + (\lambda - \lambda')\mathbf{v}' \end{aligned}$$

En tenant compte de la contrainte :

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}' = 0$$

on obtient :

$$\lambda - \lambda' = -(\mathbf{R}\ \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}$$

Et finalement le changement de repère s'écrit :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}\ \mathbf{v} \qquad [7.4]$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}\ \mathbf{p} + \mathbf{t} - ((\mathbf{R}\ \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t})\mathbf{R}\ \mathbf{v} \qquad [7.5]$$

Une troisième façon de représenter une droite est d'utiliser les coordonnées de Plucker, [53]. Soient P_1 et P_2 deux points appartenant à une droite. Les coordonnées de Plucker sont données par les deux vecteurs suivants, O étant l'origine du repère cartésien :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= OP_1 - OP_2 \\ \mathbf{v}_2 &= OP_1 \wedge OP_2 \end{aligned}$$

Dans ce cas le changement de repère s'écrit :

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{R}\ \mathbf{v}_1 \qquad [7.6]$$

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{R}\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{t} \wedge (\mathbf{R}\ \mathbf{v}_1) \qquad [7.7]$$

7.5. Représentation d'une rotation

Nous allons étudier quatre façons de représenter une rotation :

- la représentation matricielle ;
- les angles d'Euler ;
- la représentation vectorielle ;
- la représentation par des quaternions unitaires.

7.5.1. Matrices de rotation

Comme nous l'avons déjà vu au chapitre 5 une rotation peut être vue comme la transformation pouvant faire superposer deux repères orthonormés. Une rotation est donc décrite par une matrice orthonormée :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

Il y a de plus 6 contraintes d'orthonormalité qui expriment que les vecteurs ligne (ou colonne) sont de norme égale à 1 et orthogonaux entre eux :

$$\sum_{i=1}^{3} r_{ij} r_{ik} = \delta_{kj} \quad \forall k, j \in \{1, 2, 3\}$$

La rotation est donc représentée par 9 paramètres et 6 contraintes non linéaires. Ce n'est donc pas la meilleure représentation à utiliser lorsqu'on veut calculer la rotation optimale pour faire coïncider des points, des plans ou des droites.

Notons au passage quelques propriétés intéressantes des matrices de rotations. L'ensemble des rotations est un sous-groupe du groupe euclidien couramment désigné par $E(3)$. Le groupe des rotations est non commutatif. La matrice $\mathbf{R}$ a les propriétés suivantes :

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{t}$$

et

$$det(\mathbf{R}) = 1$$

7.5.2. Angles d'Euler

Une autre représentation des rotations est celle utilisant une décomposition de la matrice de rotation en trois matrices de rotation autour de chacun des trois axes. Ces trois matrices sont :

$$\mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [7.8]$$

$$\mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \quad [7.9]$$

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \quad [7.10]$$

La matrice $\mathbf{R}$ est donnée par :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x$$

et les trois angles θ, ϕ et ψ s'appellent les angles d'Euler d'après le mathématicien Leonhard Euler (1707-1783) qui a étudié les lois régissant les déplacements des solides.

7.5.3. Axe et angle de rotation

Nous allons maintenant introduire la représentation vectorielle d'une rotation. Déjà Euler avait démontré que toute rotation infinitésimale a lieu autour d'un axe instantané. Cependant c'est Olinde Rodrigues (1794-1851) qui propose un traitement complet des déplacements des objets indépendamment des forces qui causent ces déplacements. En 1840 Rodrigues a proposé le *théorème fondamental* qui montre que tout déplacement fini peut être effectué par une rotation autour d'un axe combinée avec une translation le long de cet axe. Il s'agit donc de la représentation des déplacements en termes d'un *vissage*. Ici on s'intéresse uniquement à la représentation des rotations.

Remarquons tout d'abord quelques propriétés simples de la matrice de rotation (certaines de ces propriétés ont déjà été mentionnées) :

- le déterminant d'une matrice de rotation est égal à 1,
- l'inverse d'une matrice de rotation est égale à sa transposée ;
- les valeurs propres d'une matrice de rotation sont : 1, $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ (complexes conjugués).

L'axe d'une rotation est tel qu'il n'est pas modifié par la rotation. C'est donc la direction propre associée à la valeur propre unitaire :

$$\mathbf{R}\ \mathbf{n} = \mathbf{n}$$

L'angle de rotation est fourni par les valeurs propres complexes conjugués.

En notation matricielle un vecteur $\mathbf{v}$ se transforme en un vecteur $\mathbf{v}'$ grâce à la formule suivante :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}\ \mathbf{v}$$

En notation vectorielle, un vecteur subissant une rotation d'axe $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$) et d'angle θ devient un vecteur $\mathbf{v}'$ qui s'obtient par la formule de Rodrigues :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \sin\theta\ \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} + (1 - \cos\theta)\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{v}) \qquad [7.11]$$

Pour démontrer cette formule nous allons décomposer le vecteur $\mathbf{v}$ en une composante parallèle à $\mathbf{n}$ et une composante orthogonale à $\mathbf{n}$, figure 7.3. (voir également [8]) :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}_{\perp} \\ &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) \end{aligned}$$

$\mathbf{v}'$ sera donc obtenu en additionant $\mathbf{v}'_{\|}$ et $\mathbf{v}'_{\perp}$. En remarquant que $\mathbf{v}'_{\|} = \mathbf{v}_{\|}$ on aura :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}'_{\perp}$$

$\mathbf{v}'_{\perp}$ est obtenu en faisant tourner $\mathbf{v}_{\perp}$ d'un angle θ dans un plan orthogonal à $\mathbf{n}$. Dans la base vectorielle $\mathbf{n}$, $\mathbf{v}_{\perp}$ et $\mathbf{n} \wedge \mathbf{v}_{\perp}$ on a :

$$\mathbf{v}'_{\perp} = \cos\theta\ \mathbf{v}_{\perp} + \sin\theta\ \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}_{\perp}$$

Finalement on obtient pour $\mathbf{v}'$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}'_{\perp} \\ &= \mathbf{v}_{\|} + \cos\theta\ \mathbf{v}_{\perp} + \sin\theta\ \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}_{\perp} \\ &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos\theta(\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) + \sin\theta(\mathbf{n} \wedge (\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n})) \\ &= \cos\theta\ \mathbf{v} + \sin\theta\ \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} + (1 - \cos\theta)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \end{aligned}$$

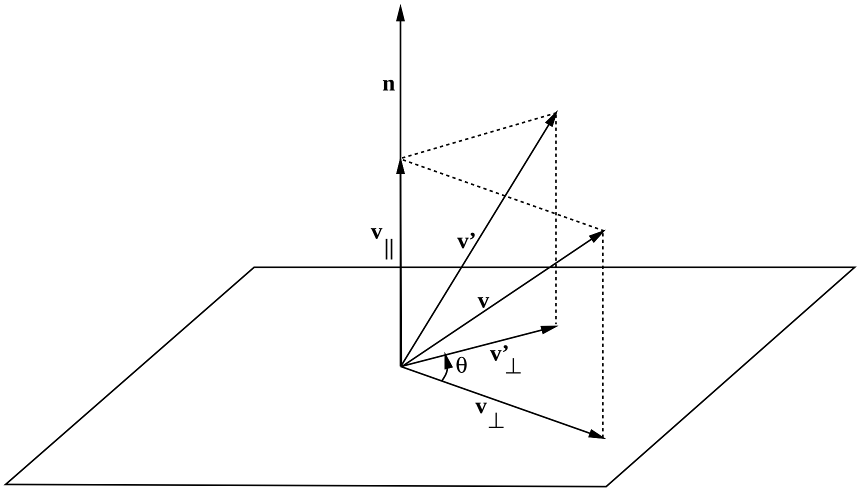

Figure 7.3. *Décomposition vectorielle permettant de démontrer facilement la formule de Rodrigues, d'après Ayache.*

Par ailleurs on a la relation vectorielle suivante :

$$\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{v}$$

Mais comme $\mathbf{n}$ est unitaire on obtient :

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{v} + \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{v})$$

et en substituant dans l'équation précédente on obtient bien la formule de Rodrigues, soit l'équation [7.11].

7.5.4. De $(\mathbf{n}, \theta)$ à $\mathbf{R}$

La représentation d'une rotation par un axe et un angle est, comme nous allons le voir, très pratique pour résoudre le problème de la recherche d'une transformation rigide optimale. Cependant il est utile de pouvoir passer rapidement d'une représentation à une autre.

Remarquons tout d'abord qu'un produit vectoriel peut se mettre sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \wedge \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} -n_z v_y + n_y v_z \\ n_z v_x - n_x v_z \\ -n_y v_x + n_x v_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$S(\mathbf{n})$ est la matrice antisymétrique associée au vecteur $\mathbf{n}$:

$$S(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi la version matricielle de la formule de Rodrigues :

$$\mathbf{v}' = \left(\mathbf{I} + \sin\theta S(\mathbf{n}) + (1 - \cos\theta) S^2(\mathbf{n})\right) \mathbf{v}$$

Soit pour la matrice de rotation :

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta S(\mathbf{n}) + (1 - \cos\theta) S^2(\mathbf{n})$$

En explicitant les termes et avec les notations $s = \sin\theta$ et $c = \cos\theta$ on obtient pour $\mathbf{R}$:

$$\begin{pmatrix} c + (1-c)n_x^2 & -n_z s + (1-c)n_x n_y & n_y s + (1-c)n_x n_z \\ n_z s + (1-c)n_x n_y & c + (1-c)n_y^2 & -n_x s + (1-c)n_z n_y \\ -n_y s + (1-c)n_x n_z & n_x s + (1-c)n_z n_y & c + (1-c)n_z^2 \end{pmatrix} \qquad [7.12]$$

Il est intéressant de remarquer que $(\mathbf{n}, \theta)$ représente la même rotation que $(-\mathbf{n}, -\theta)$ ou que $(-\mathbf{n}, 2\pi - \theta)$. Il suffit de substituer $\mathbf{n}$ par $-\mathbf{n}$ et θ par $-\theta$ ou par $2\pi - \theta$ dans l'équation précédente.

7.5.5. De R à $(\mathbf{n}, \theta)$

Il sera également utile de pouvoir extraire l'axe et l'angle de rotation à partir de la matrice de rotation. Pour cela il y a deux possibilités :

1. extraire les valeurs propres de cette matrice. Calculer le vecteur propre associé à la valeur propre 1 et normaliser ce vecteur. Cela donne la direction de l'axe de rotation. L'angle de rotation se calcule facilement à partir des valeurs propres complexes conjuguées.

2. identifier les éléments r_{ij} de la matrice de rotation avec l'expression de cette matrice telle qu'elle est fournie par la formule de Rodrigues, équation [7.12].

Le calcul par identification est trivial. En additionnant les termes diagonaux dans l'équation [7.12] on obtient :

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = 1 + 2\cos\theta$$

Par ailleurs on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
r_{21} - r_{12} &= 2n_z \sin\theta \\
r_{31} - r_{13} &= -2n_y \sin\theta \\
r_{32} - r_{23} &= 2n_x \sin\theta
\end{aligned}$$

En tenant compte du fait que le vecteur $\mathbf{n}$doit être unitaire on obtient (rappelons-nous que le signe n'est pas très important) :

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{1}{2}(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1) \\
\sin^2\theta &= \frac{1}{4}\left((r_{21} - r_{12})^2 + (r_{31} - r_{13})^2 + (r_{32} - r_{23})^2\right) \\
n_x &= \frac{r_{32} - r_{23}}{2\sin\theta} \\
n_y &= -\frac{r_{31} - r_{13}}{2\sin\theta} \\
n_z &= \frac{r_{21} - r_{12}}{2\sin\theta}
\end{aligned}$$

Il faut remarquer ici que le passage de $\mathbf{R}$ à $(\mathbf{n}, \theta)$ est ambigu car on peut choisir aussi bien $(\mathbf{n}, \theta)$ que $(-\mathbf{n}, -\theta)$ ou que $(-\mathbf{n}, 2\pi - \theta)$. La représentation $(\mathbf{n}, \theta)$ comporte 4 paramètres. Si de plus on choisit le module de $\mathbf{n}$tel qu'il soit égal à la valeur de l'angle de rotation :

$$||\mathbf{n}|| = \theta$$

on n'a alors plus que 3 paramètres pour décrire une rotation et cette représentation est minimale. En pratique elle sera utilisée (sous une forme légérement modifiée) pour calculer la rotation optimale entre deux ensembles de caractéristiques 3D.

7.5.6. Rotation et quaternion unitaire

Une autre représentation possible des rotations est celle utilisant les quaternions. Dans un premier temps nous allons étudier quelques propriétés des quaternions, ensuite nous les utiliserons pour décrire une rotation et nous établirons également l'équivalence avec les autres représentations déjà utilisées. L'utilisation des quaternions se justifiera par une formulation très élégante du problème d'optimisation, [59].

7.5.6.1. Les quaternions

Les quaternions peuvent être vus comme des vecteurs de dimension 4 ou encore comme des nombre complexes à trois parties imaginaires :

$$\mathbf{q} = q_0 + iq_x + jq_y + kq_z$$

avec :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

On peut remarquer qu'on obtient également :

$$\begin{aligned} ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned}$$

Grâce à ces formules on peut facilement calculer le produit de deux quaternions, noté "$*$" :

$$\mathbf{r} * \mathbf{q} = (r_0 + ir_x + jr_y + kr_z)(q_0 + iq_x + jq_y + kq_z)$$

Le produit de deux quaternions n'est pas commutatif. Comme le produit vectoriel, le produit de deux quaternions peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{r} * \mathbf{q} = Q(\mathbf{r})\mathbf{q}$$

avec $Q(\mathbf{r})$ donnée par :

$$Q(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} r_0 & -r_x & -r_y & -r_z \\ r_x & r_0 & -r_z & r_y \\ r_y & r_z & r_0 & -r_x \\ r_z & -r_y & r_x & r_0 \end{pmatrix} \qquad [7.13]$$

On peut également écrire le produit sous la forme suivante :

$$\mathbf{q} * \mathbf{r} = W(\mathbf{r})\mathbf{q}$$

Avec $W(\mathbf{r})$ défini par :

$$W(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} r_0 & -r_x & -r_y & -r_z \\ r_x & r_0 & r_z & -r_y \\ r_y & -r_z & r_0 & r_x \\ r_z & r_y & -r_x & r_0 \end{pmatrix} \qquad [7.14]$$

On peut facilement vérifier les propriétés suivantes quant à ces matrices :

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{r})^t Q(\mathbf{r}) &= Q(\mathbf{r})Q(\mathbf{r})^t = \mathbf{r}^t\mathbf{r}I \\ W(\mathbf{r})^t W(\mathbf{r}) &= W(\mathbf{r})W(\mathbf{r})^t = \mathbf{r}^t\mathbf{r}I \\ Q(\mathbf{r})\mathbf{q} &= W(\mathbf{q})\mathbf{r} \\ Q(\mathbf{r})^t\mathbf{r} &= W(\mathbf{r})^t\mathbf{r} = \mathbf{r}^t\mathbf{r}\mathbf{e} \\ Q(\mathbf{r})Q(\mathbf{q}) &= Q(Q(\mathbf{r})\mathbf{q}) \\ W(\mathbf{r})W(\mathbf{q}) &= W(W(\mathbf{r})\mathbf{q}) \\ Q(\mathbf{r})W(\mathbf{q})^t &= W(\mathbf{q})^t Q(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

e étant le quaternion unité : $e = (1\ 0\ 0\ 0)^t$.

Le produit scalaire de deux quaternions est donné par :

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{q} = r_0 q_0 + r_x q_x + r_y q_y + r_z q_z$$

On a bien évidemment :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = ||\mathbf{q}||^2$$

Le quaternion conjugué de $\mathbf{q}$ est $\overline{\mathbf{q}}$ défini par :

$$\overline{\mathbf{q}} = q_0 - iq_x - jq_y - kq_z$$

Notons que si $Q(\mathbf{q})$ et $W(\mathbf{q})$ sont les matrices associées à $\mathbf{q}$, $Q(\mathbf{q})^t$ et $W(\mathbf{q})^t$ sont les matrices associées au quaternion conjugué $\overline{\mathbf{q}}$. On a :

$$\mathbf{q} * \overline{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = ||\mathbf{q}||^2$$

et on obtient ainsi le quaternion inverse de $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{1}{||\mathbf{q}||^2}\,\overline{\mathbf{q}}$$

Pour un quaternion unitaire (de norme égale à 1) l'inverse est égal à son conjugué. Nous allons maintenant établir quelques propriétés du produit qui nous seront utiles par la suite. Ces propriétés sont facilement vérifiables si on utilise la notation matricielle. On a :

$$(\mathbf{q} * \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{q} * \mathbf{r}) = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \qquad [7.15]$$

On en déduit facilement les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (\mathbf{q} * \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{q} * \mathbf{p}) &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \\ ||\mathbf{p} * \mathbf{q}||^2 &= ||\mathbf{p}||^2 ||\mathbf{q}||^2 \\ (\mathbf{p} * \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r} &= \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} * \overline{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

Un vecteur de dimension 3 peut s'écrire comme un quaternion purement imaginaire :

$$\mathbf{q} = 0 + iq_x + jq_y + kq_z$$

et les matrices associées à un quaternion purement imaginaire sont des matrices antisymétriques. Par exemple on a :

$$Q(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & 0 & -q_z & q_y \\ q_y & q_z & 0 & -q_x \\ q_z & -q_y & q_x & 0 \end{pmatrix}$$

avec les propriétés évidentes :

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{q})^t &= -Q(\mathbf{q}) \\ W(\mathbf{q})^t &= -W(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

7.5.6.2. Quaternion et rotation

On peut représenter une rotation avec un quaternion unitaire à condition de pouvoir trouver une transformation qui change un vecteur (un quaternion purement imaginaire) en un vecteur de façon que la transformation préserve la longueur du vecteur transformé ainsi que le produit scalaire et le signe du produit vectoriel.

Soit $\mathbf{r}$ un quaternion purement imaginaire et $\mathbf{q}$ un quaternion unitaire. On peut alors remarquer que le quaternion $\mathbf{r}'$ tel que :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{q} * \mathbf{r} * \overline{\mathbf{q}} \qquad [7.16]$$

est un quaternion purement imaginaire et de plus on a :

$$\mathbf{q} * \mathbf{r} * \overline{\mathbf{q}} = (Q(\mathbf{q})\mathbf{r}) * \overline{\mathbf{q}} = (W(\mathbf{q})^t Q(\mathbf{q}))\mathbf{r}$$

Par ailleurs notons que :

$$(-\mathbf{q}) * \mathbf{r} * (-\overline{\mathbf{q}}) = \mathbf{q} * \mathbf{r} * \overline{\mathbf{q}}$$

ce qui implique que les quaternions $\mathbf{q}$ et $-\mathbf{q}$ représentent la même rotation. La matrice $W(\mathbf{q})^t Q(\mathbf{q})$ est une matrice orthonormée :

$$W(\mathbf{q})^t Q(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2(q_x q_y - q_0 q_z) & 2(q_x q_z + q_0 q_y) \\ 0 & 2(q_x q_y + q_0 q_z) & q_0^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2(q_y q_z - q_0 q_x) \\ 0 & 2(q_x q_z - q_0 q_y) & 2(q_y q_z + q_0 q_x) & q_0^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 \end{pmatrix}$$

On peut maintenant établir l'expression d'une matrice de rotation $\mathbf{R}$ en fonction d'un quaternion unitaire $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2(q_x q_y - q_0 q_z) & 2(q_x q_z + q_0 q_y) \\ 2(q_x q_y + q_0 q_z) & q_0^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2(q_y q_z - q_0 q_x) \\ 2(q_x q_z - q_0 q_y) & 2(q_y q_z + q_0 q_x) & q_0^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 \end{pmatrix}$$

et on peut également écrire :

$$W(\mathbf{q})^t Q(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ 0 & \mathbf{R} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons également extraire un quaternion unitaire à partir d'une matrice de rotation. Soit r_{ij} un élément de la matrice de rotation. En considérant les termes diagonaux de la matrice précédente on obtient les combinaisons suivantes :

$$\begin{aligned} 1 + r_{11} + r_{22} + r_{33} &= 4q_0^2 \\ 1 + r_{11} - r_{22} - r_{33} &= 4q_x^2 \\ 1 - r_{11} + r_{22} - r_{33} &= 4q_y^2 \\ 1 - r_{11} - r_{22} + r_{33} &= 4q_z^2 \end{aligned}$$

On choisit la composante du quaternion ayant la valeur absolue la plus élevée. Ensuite on injecte la composante choisie dans trois parmi les six expressions :

$$\begin{aligned} r_{32} - r_{23} &= 4q_0q_x \\ r_{13} - r_{31} &= 4q_0q_y \\ r_{21} - r_{12} &= 4q_0q_z \\ r_{21} + r_{12} &= 4q_xq_y \\ r_{32} + r_{23} &= 4q_yq_z \\ r_{13} + r_{31} &= 4q_zq_x \end{aligned}$$

ce qui permet de trouver les composantes du quaternion unitaire correspondant à la rotation.

7.5.6.3. Equivalence avec la formule de Rodrigues

Nous venons d'établir l'équivalence entre la représentation matricielle et la représentation quaternion d'une rotation. Il y a une relation très simple entre un quaternion unitaire et l'axe et l'angle d'une rotation. Remarquons tout d'abord qu'un quaternion peut s'écrire comme la concaténation d'un réel avec un vecteur de dimension 3 :

$$\mathbf{q} = q_0 + iq_x + jq_y + kq_z = (q_0, \vec{\mathbf{q}})$$

et avec cette notation la multiplication de deux quaternions peut s'écrire :

$$\mathbf{p} * \mathbf{q} = (p_0q_0 - \vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{q}},\ p_0\vec{\mathbf{q}} + q_0\vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{p}} \wedge \vec{\mathbf{q}})$$

L'équation [7.16] devient alors :

$$\mathbf{r}' = (0, (q_0^2 - \vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{q}})\vec{\mathbf{r}} + 2q_0\vec{\mathbf{q}} \wedge \vec{\mathbf{r}} + 2(\vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{r}})\vec{\mathbf{q}})$$

$\mathbf{r}'$ est donc un quaternion purement imaginaire et sa partie purement imaginaire est :

$$\vec{\mathbf{r}'} = (q_0^2 - \vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{q}})\vec{\mathbf{r}} + 2q_0\vec{\mathbf{q}} \wedge \vec{\mathbf{r}} + 2(\vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{r}})\vec{\mathbf{q}}$$

et on peut donc confondre un quaternion purement imaginaire avec un vecteur de dimension 3 :

$$\vec{\mathbf{r}'} = \mathbf{r}'$$

En remarquant que la formule de Rodrigues (équation [7.11]) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\vec{\mathbf{r}}' = \cos\theta\, \vec{\mathbf{r}} + \sin\theta\, \vec{\mathbf{n}} \wedge \vec{\mathbf{r}} + (1-\cos\theta)(\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}})\vec{\mathbf{n}}$$

et en identifiant les deux expressions précédentes de $\mathbf{r}'$ on obtient :

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos\frac{\theta}{2} \\ \vec{\mathbf{q}} &= \sin\frac{\theta}{2}\vec{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

Le quaternion représentant une rotation d'axe $\mathbf{n}$ et d'angle θ s'écrit donc :

$$\mathbf{q} = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\,(in_x + jn_y + kn_z) \qquad [7.17]$$

7.6. Transformation rigide optimale

7.6.1. Décomposition du critère d'optimalité

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire à nouveau le critère permettant de déterminer la transformation rigide optimale dans les cas des points, des plans et des droites.

Pour des correspondances de points, le critère reste inchangé et le problème de minimisation correspondant est, conformément à l'équation [7.1] :

$$\min_{\mathbf{R}\,,\mathbf{t}} \left(\sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{c}_i - \mathbf{R}\ \mathbf{m}_i - \mathbf{t}||^2 \right)$$

Quant aux correspondances de plans et conformément aux équations [7.2] et [7.3], le critère à minimiser se décompose en deux critères :

$$\min_{\mathbf{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{v}'_i - \mathbf{R}\ \mathbf{v}_i||^2 \right)$$
$$\min_{\mathbf{t}} \left(\sum_{i=1}^{n} ||d'_i - d_i - (\mathbf{R}^{\,*}\mathbf{v}_i)\cdot\mathbf{t}||^2 \right)$$

$\mathbf{R}^{\,*}$ étant la rotation optimale trouvée grâce au premier de ces deux critères.

Quant aux correspondances de droites et pour la représentation paramétrique choisie on obtient, à partir des équations [7.4] et [7.5] les deux critères suivants :

$$\min_{\mathbf{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{v}'_i - \mathbf{R}\ \mathbf{v}_i||^2 \right)$$
$$\min_{\mathbf{t}} \left(\sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{p}'_i - \mathbf{R}\ ^*\mathbf{p}_i - t + ((\mathbf{R}\ ^*\mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{t})\mathbf{R}\ ^*\mathbf{v}_i||^2 \right)$$

Si on choisit les coordonnées de Plucker, à partir des équations [7.6] et [7.7] on obtient tout d'abord :

$$\min_{\mathbf{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{w}'_{1i} - \mathbf{R}\ \mathbf{w}_{1i}||^2 \right)$$

avec :

$$\mathbf{w}_{1i} = \frac{\mathbf{v}_{1i}}{||\mathbf{v}_{1i}||}$$
$$\mathbf{w}'_{1i} = \frac{\mathbf{v}'_{1i}}{||\mathbf{v}'_{1i}||}$$

ce qui permet de déterminer la rotation optimale $\mathbf{R}\ ^*$.

Pour déterminer la translation optimale, on peut remarquer que pour tout i, le vecteur $\mathbf{v}'_{2i}$ doit être colinéaire au transformé du vecteur $\mathbf{v}_{2i}$, soit leur produit vectoriel est nul :

$$\mathbf{v}_{2i} \wedge (\mathbf{R}\ ^*\mathbf{v}_{2i} + \mathbf{t} \wedge (\mathbf{R}\ ^*\mathbf{v}_{1i})) = 0$$

En simplifiant cette expression et en sommant sur toutes les droites se correspondant, on obtient un critère pour trouver la translation optimale :

$$\min_{\mathbf{t}} \left(\sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{v}'_{2i} \wedge (\mathbf{R}\ ^*\mathbf{v}_{2i}) + r_i(\mathbf{v}'_{2i} \cdot \mathbf{t})\mathbf{v}'_{1i}||^2 \right)$$

Pour résumer, dans les cas des droites et des plans nous avons décomposé le critère initial en deux critères : on estime d'abord la rotation optimale et ensuite on utilise cette rotation pour déterminer la translation optimale. Cette décomposition a des avantages et des inconvénients. L'avantage est que chaque critère est plus simple et, comme nous allons le voir, la solution au problème d'optimisation de la rotation est très élégante et très fiable d'un point de vue numérique. Le critère de translation se ramène à un problème d'optimisation linéaire très classique. L'inconvénient est que les erreurs éventuelles associées au calcul de la rotation vont se répercuter sur le calcul de la translation.

Dans le cas des points nous pouvons également décomposer le critère initial en deux critères. En effet, soient $\mathbf{R}^*$ et $\mathbf{t}^*$ la rotation et translation optimales du critère dans le cas de la mise en correspondance de points, équation [7.1]. On a alors la propriété suivante : le centre de gravité des points C_i coïncide avec le centre de gravité des transformés des M_i [110]. Si C est le centre de gravité des points C_i et M est le centre de gravité des points M_i, on a d'après cette propriété :

$$\mathbf{c} = \mathbf{R}^*\mathbf{m} + \mathbf{t}^*$$

Choisissons C et M comme origines respectives des repères des données capteur et des données modèle. Cela revient à effectuer les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i &= \mathbf{c}_i - \mathbf{c} \\ k_i &= \mathbf{m}_i - \mathbf{m} \end{aligned}$$

avec :

$$\mathbf{c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{c}_i$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{m}_i$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i - \mathbf{R}^*\mathbf{m}_i - \mathbf{t}^* &= \mathbf{q}_i + \mathbf{c} - \mathbf{R}^* k_i - \mathbf{R}^*\mathbf{m} - \mathbf{t}^* \\ &= \mathbf{q}_i - \mathbf{R}^* k_i \end{aligned}$$

Finalement, dans le cas des points, la rotation et la translation optimales sont données par :

$$\min\left(\sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{q}_i - \mathbf{R}\ k_i\|^2\right)$$

et par :

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{c} - \mathbf{R}^*\mathbf{m}$$

7.6.2. La rotation optimale

En ce qui concerne la rotation, dans les trois cas étudiés (points, plans et droites), nous avons abouti au critère suivant :

$$\min_{\mathbf{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{v}'_i - \mathbf{R}\ \mathbf{v}_i\|^2 \right) \qquad [7.18]$$

Dans cette équation $\mathbf{v}_i$ est un vecteur mis en correspondance avec le vecteur $\mathbf{v}'_i$. Il y a n telles correspondances et de plus les modules de $\mathbf{v}_i$ et de $\mathbf{v}'_i$ sont égaux pour tout i. La minimisation du critère de l'équation [7.18] dépend du choix d'une représentation pour la rotation. Nous avons étudié trois représentations possibles pour la rotation, nous avons donc trois possibilités :

- *matrice orthonormée.* Dans ce cas une rotation est décrite par 9 paramètres qui sont liés par les 6 contraintes d'orthonormalité. Un certain nombre de solutions a été proposé parmi lesquelles on peut citer [110], [5], [172].

- *angles d'Euler.* Certains auteurs ont proposé de trouver les angles d'Euler optimaux. Cette formulation conduit à un problème de minimisation non linéaire.

- *axe et angle.* Dans ce cas nous aurons à estimer 3 paramètres, soit les composantes du vecteur directeur de l'axe de rotation, la valeur de l'angle étant proportionnelle au module de ce vecteur. Il s'agit d'une représentation intéressante car minimale en ce qui concerne le nombre des paramètres à estimer. Nous allons décrire une solution ramenant le problème à la résolution d'un système linéaire surcontraint. Cette méthode s'apparente à la méthode de calibration caméra/pince proposée par Tsai [171].

- *quaternion unitaire.* La représentation par des quaternions unitaires est également intéressante car, d'une part, il n'y a que 4 paramètres à estimer et, d'autre part, le calcul se ramène à la détermination de la plus petite valeur propre d'une matrice symétrique de taille 4 [59], [53].

7.6.3. Axe et angle de rotation optimaux

Le critère de l'équation [7.18] signifie que nous cherchons une solution approchée d'un système de n équations où chaque équation du système est du type :

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{R}\ \mathbf{v}_i$$

Soit $\mathbf{n}$ le vecteur directeur de l'axe de rotation et utilisons le fait que la rotation conserve le produit scalaire. On obtient :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i = (\mathbf{R}\ \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{R}\ \mathbf{v}_i)$$

et si on se souvient que $\mathbf{n}$ est un vecteur propre de $\mathbf{R}$ associé à la valeur propre 1 on obtient :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}'_i$$

d'où on déduit la propriété de perpendicularité suivante :

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i) = 0 \qquad [7.19]$$

Par ailleurs le module d'un vecteur est conservé par rotation. On a donc, pour tout i :

$$||\mathbf{v}'_i|| = ||\mathbf{v}_i||$$

On déduit facilement une deuxième propriété de perpendicularité :

$$(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i) = 0 \qquad [7.20]$$

Puisque le vecteur $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i$ est perpendiculaire aux vecteurs $\mathbf{n}$ et $\mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i$ il est donc proportionnel à leur produit vectoriel :

$$(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i) \wedge \mathbf{n} = k(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i) \qquad [7.21]$$

Afin de déterminer la valeur de k nous allons, comme lorsque nous avons démontré la formule de Rodrigues, décomposer les vecteurs v_i et $\mathbf{v}'_i$ selon deux directions, une direction colinéaire à l'axe de rotation $\mathbf{n}$ et une autre direction orthogonale à cet axe de rotation, figure 7.4. :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{v}_i & = & \mathbf{v}_{i\perp} + \mathbf{v}_{i\|} \\ \mathbf{v}'_i & = & \mathbf{v}'_{i\perp} + \mathbf{v}'_{i\|} \end{array}$$

En substituant ces formules dans l'équation [7.21] on obtient :

$$(\mathbf{v}'_{i\perp} + \mathbf{v}'_{i\|} + \mathbf{v}_{i\perp} + v_{i\|}) \wedge \mathbf{n} = k(\mathbf{v}_{i\perp} + \mathbf{v}_{i\|} - \mathbf{v}'_{i\perp} - \mathbf{v}'_{i\|})$$

En développant et en remarquant que $\mathbf{v}'_{i\|} = v_{i\|}$ on obtient :

$$(\mathbf{v}_{i\perp} + \mathbf{v}'_{i\perp}) \wedge \mathbf{n} = k(\mathbf{v}_{i\perp} - \mathbf{v}'_{i\perp})$$

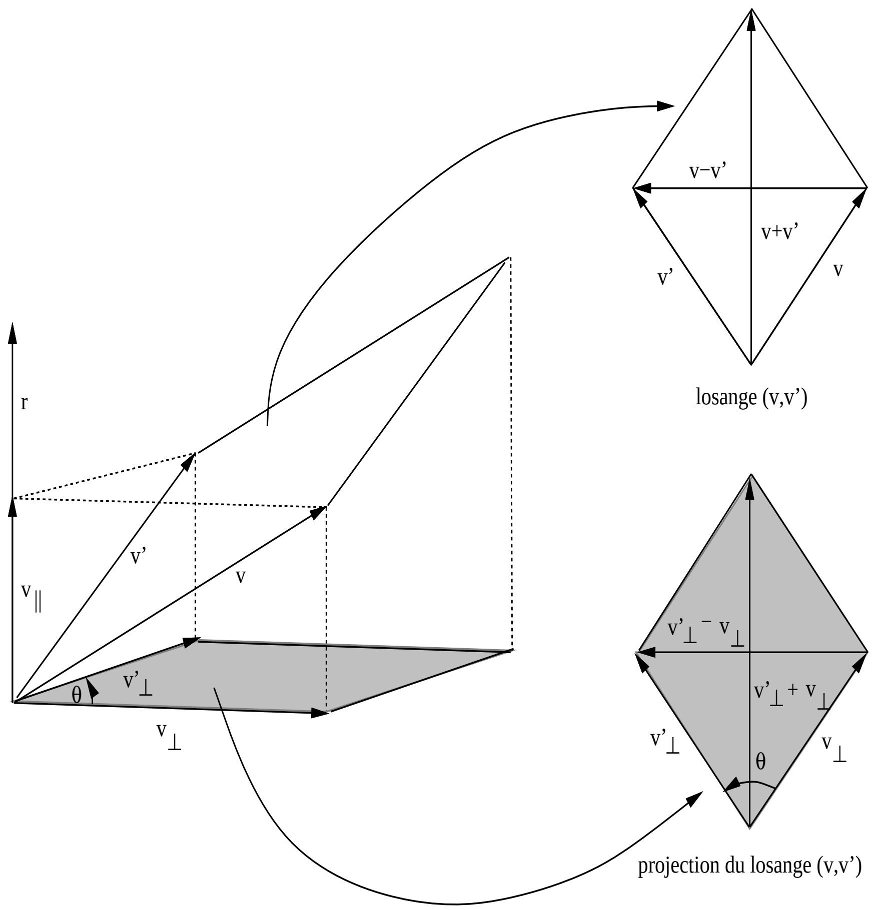

Figure 7.4. *Calcul de la rotation optimale utilisant l'axe et l'angle de rotation.*

On peut remarquer que les vecteurs $\mathbf{v}_{i\perp} + \mathbf{v}'_{i\perp}$ et $\mathbf{v}_{i\perp} - \mathbf{v}'_{i\perp}$ sont orthogonaux et par ailleurs ils sont tous les deux orthogonaux au vecteur unitaire $\mathbf{n}$. On obtient donc k comme le rapport suivant :

$$k = \frac{||\mathbf{v}_{i\perp} + \mathbf{v}'_{i\perp}||}{||\mathbf{v}_{i\perp} - \mathbf{v}'_{i\perp}||}$$

Or, l'angle entre les vecteurs $\mathbf{v}_{i\perp}$ et $\mathbf{v}'_{i\perp}$ est l'angle de la rotation que l'on cherche, soit θ. D'après la figure 7.4. on remarque qu'il s'agit d'un des angles d'un losange qui a comme diagonales $\mathbf{v}_{i\perp} + \mathbf{v}'_{i\perp}$ et $\mathbf{v}_{i\perp} - \mathbf{v}'_{i\perp}$. La relation entre cet angle et le rapport des longueurs de ces diagonales est :

$$k = \frac{1}{\tan(\theta/2)} \qquad [7.22]$$

En posant :

$$\mathbf{N} = \tan\frac{\theta}{2}\ \mathbf{n}$$

on obtient un système de trois équations et trois inconnues pour chaque i :

$$S(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i)\mathbf{N} = \mathbf{v}'_i - \mathbf{v}_i \qquad [7.23]$$

Le rang de la matrice antisymetrique $S()$ est 2 et chaque mise en correspondance i fournit donc 2 équations et non pas 3 équations. Il faut donc au moins 2 mises en correspondance pour trouver un axe de rotation. En général on dispose de n mises en correspondance. On obtient alors un système de $2n$ équations à 3 inconnues. Si on considère les deux premières équations du système d'équations [7.23] on obtiendra :

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -(\mathbf{v}_{zi} + \mathbf{v}'_{zi}) & \mathbf{v}_{yi} + \mathbf{v}'_{yi} \\ \mathbf{v}_{zi} + \mathbf{v}'_{zi} & 0 & -(\mathbf{v}_{xi} + \mathbf{v}'_{xi}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_y \\ \mathbf{N}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{v}'_{xi} - \mathbf{v}_{xi} \\ \mathbf{v}'_{yi} - \mathbf{v}_{yi} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

La solution optimale pour $\mathbf{N}$ est obtenue en résolvant ce système d'équations surcontraint. On obtient finalement le vecteur unitaire de l'axe de rotation et l'angle de rotation :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{N}}{||\mathbf{N}||} \\ \theta &= 2\arctan(||\mathbf{N}||) \end{aligned}$$

et grâce à la formule de Rodrigues on obtient facilement la matrice de rotation à partir du vecteur unitaire $\mathbf{n}$ et de l'angle θ.

La solution que nous avons proposée ici est particulièrement simple car la rotation est représentée par un vecteur dont le module est proportionnel à l'angle de rotation. On a donc une représentation minimale particulièrement intéressante pour la recherche d'une rotation optimale.

7.6.4. Quaternion unitaire optimal

Nous rappelons qu'un quaternion unitaire décrivant une rotation d'axe $\mathbf{n}$ et d'angle θ s'écrit sous la forme (équation [7.17]) :

$$\mathbf{q} = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\,(in_x + jn_y + kn_z)$$

et que la rotation d'un vecteur $\mathbf{v}$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{R}\,\mathbf{v} \\ &= \mathbf{q} * \mathbf{v} * \overline{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

Le critère de l'équation [7.18] devient :

$$\begin{gathered} \min_{\mathbf{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{v}'_i - \mathbf{q} * \mathbf{v}_i * \overline{\mathbf{q}}\|^2\right) \\ \text{avec } \|\mathbf{q}\|^2 = 1 \end{gathered}$$

Compte tenu de l'équation [7.15] et des propriétés qui en découlent, on a successivement :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}'_i - \mathbf{q} * \mathbf{v}_i * \overline{\mathbf{q}}\|^2 &= \|\mathbf{v}'_i - \mathbf{q} * \mathbf{v}_i * \overline{\mathbf{q}}\|^2 \|\mathbf{q}\|^2 \\ &= \|\mathbf{v}'_i * \mathbf{q} - \mathbf{q} * \mathbf{v}_i * \overline{\mathbf{q}} * \mathbf{q}\|^2 \\ &= \|\mathbf{v}'_i * \mathbf{q} - \mathbf{q} * \mathbf{v}_i\|^2 \end{aligned}$$

Le produit de deux quaternions peut s'écrire sous forme matricielle. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_i * \mathbf{q} &= Q(\mathbf{v}'_i)\mathbf{q} \\ \mathbf{q} * \mathbf{v}_i &= W(\mathbf{v}_i)\mathbf{q} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}'_i * \mathbf{q} - \mathbf{q} * \mathbf{v}_i\|^2 &= \left((Q(\mathbf{v}'_i) - W(\mathbf{v}_i))\mathbf{q}\right)^t \left((Q(\mathbf{v}'_i) - W(\mathbf{v}_i))\mathbf{q}\right) \\ &= \mathbf{q}^t A_i \mathbf{q} \end{aligned}$$

où A_i est la matrice symétrique de dimension 4 :

$$A_i = (Q(\mathbf{v}'_i) - W(\mathbf{v}_i))^t (Q(\mathbf{v}'_i) - W(\mathbf{v}_i))$$

Le critère de l'équation [7.18] devient donc :

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{q}^t A_i \mathbf{q} \right) &= \min_{\mathbf{q}} \left(\mathbf{q}^t (\sum_{i=1}^{n} A_i) \mathbf{q} \right) \\ &= \min_{\mathbf{q}} \left(\mathbf{q}^t B \mathbf{q} \right)\end{aligned}$$

avec :

$$B = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} (Q(\mathbf{v}'_i) - W(\mathbf{v}_i))^t (Q(\mathbf{v}'_i) - W(\mathbf{v}_i))$$

étant une matrice symétrique positive. Sous la contrainte que le quaternion doit être unitaire, on obtient finalement le critère suivant :

$$\min_{\mathbf{q}} Q = \min_{\mathbf{q}} \left(\mathbf{q}^t B \mathbf{q} + \lambda (1 - \mathbf{q}^t \mathbf{q}) \right) \qquad [7.24]$$

En dérivant Q par rapport à $\mathbf{q}$on obtient :

$$B\mathbf{q} - \lambda \mathbf{q} = 0$$

et en substituant cette solution dans l'équation [7.24] on obtient :

$$Q = \lambda$$

Le quaternion unitaire qui minimise Q est donc le vecteur propre unitaire de la matrice B associé à la plus petite valeur propre de B, soit λ. Nous rappelons qu'une matrice symétrique a des valeurs propres réelles et une matrice symétrique positive a toutes ses valeurs propres positives. Soient alors les vecteurs propres de B qui forment une base orthogonale, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ et $\mathbf{w}_4$. Si ces vecteurs sont unitaires, la base est orthonormée. Le quaternion $\mathbf{q}$ peut s'écrire dans cette base :

$$\mathbf{q} = \mu_1 \mathbf{w}_1 + \mu_2 \mathbf{w}_2 + \mu_3 \mathbf{w}_3 + \mu_4 \mathbf{w}_4$$

Pour tout i on a :

$$B\mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i$$

λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 étant les valeurs propres de B avec :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$$

En tenant compte du fait que les vecteurs propres forment une base orthonormée, on peut écrire :

$$\mathbf{q}^t B \mathbf{q} = \mu_1^2 \lambda_1 + \mu_2^2 \lambda_2 + \mu_3^2 \lambda_3 + \mu_4^2 \lambda_4$$

Cette expression est minimale pour $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$. On obtient donc :

$$\mathbf{q} = \mathbf{w}_1$$

et

$$\mathbf{q}^t B \mathbf{q} = \lambda_1$$

Le quaternion unitaire optimal est donc le vecteur propre unitaire de B associé à sa plus petite valeur propre.

7.6.5. La translation optimale

Une fois que nous avons estimé la rotation optimale $\mathbf{R}^*$, le calcul de la translation optimale est possible grâce à l'un des critères suivants :

$$\min_{\mathbf{t}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|d_i' - d_i - (\mathbf{R}^* \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{t}\|^2 \right)$$

pour le cas des plans, ou :

$$\min_{\mathbf{t}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{p}_i' - \mathbf{R}^* \mathbf{p}_i - \mathbf{t} + ((\mathbf{R}^* \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{t}) \mathbf{R}^* \mathbf{v}_i\|^2 \right)$$

pour le cas des droites.

Dans ces deux cas, en dérivant par rapport aux trois composantes de $\mathbf{t}$ et en annulant ces dérivées, on obtient un système de trois équations linéaires en trois inconnues qui se résout sans aucune difficulté. Le cas des points est lui encore plus simple car il suffit de calculer le vecteur reliant les barycentres des deux ensembles de points :

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{c} - \mathbf{R}^* \mathbf{m}$$

Notons cependant que, dans ce dernier cas, la solution obtenue pour la translation n'est pas très fiable en présence de bruit. Une alternative intéressante a été récemment proposée par Walker et al [173] : la rotation et la translation sont représentées par un quaternion dual. On peut alors estimer simultanément et d'une façon optimale les paramètres de rotation et translation.