Chapitre 12

Des cartes de profondeur à la géométrie des surfaces

Un autre type de données 3D est constitué par les cartes de profondeur obtenues par télémètre laser [154]. Dans ce cas on obtient une image de profondeur $I(x, y)$ représentant la trace discrète d'une surface 3D. En effet ici l'information 3D est accessible directement sous la forme des points de coordonnées $(x, y, I(x, y))$ dans l'espace cartésien 3D. I définit alors un paramétrage naturel de la surface que l'on peut mettre à profit pour calculer ses caractéristiques [154].

Les méthodes développées dans ce cadre peuvent aussi être utilisées pour caractériser la surface définie implicitement par une image de niveaux de gris $((x, y, I(x, y)))$. Un exemple d'application à l'extraction de réseaux fins dans des images de niveaux de gris sera présenté [141].

12.1. Courbures des surfaces à partir d'images de profondeur

Soit une image de profondeur $I(x, y)$ représentant la trace discrète d'une surface S (ensemble des points de coordonnées $(x, y, I(x, y))$ dans l'espace cartésien 3D). On considère que I définit un paramétrage régulier de la surface. S est donc définie par l'équation :

$$\vec{S}(x, y) = (x, y, I(x, y))^t \qquad [12.1]$$

On définit le plan tangent $S_T(x, y)$ de la surface $\vec{S}(x, y)$ en chaque point P par :

$$\begin{array}{c} \vec{S_x} = (\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}) = (1, 0, I_x)^t \\ \vec{S_y} = (\frac{\partial \vec{S}}{\partial y}) = (0, 1, I_y)^t \\ S_T(x, y) = \{\vec{S_x}, \vec{S_y}\} \end{array} \qquad [12.2]$$

où I_x et I_y représentent respectivement les dérivées partielles de I selon x et y.

On peut utiliser la première et la seconde forme fondamentale pour calculer les courbures principales et les directions principales de courbure en chaque point P de la surface $\vec{S}(x, y)$ (voir chapitre : "Des images volumiques à la géométrie des surfaces").

Les cœfficients de la première forme fondamentale dans la base $\{\vec{S_x}, \vec{S_y}\}$ forment une matrice F_1 définie par :

$$F_1 = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

où

$$e = ||\vec{S_x}||^2 \quad f = \vec{S_x}.\vec{S_y} \quad g = ||\vec{S_y}||^2 \qquad [12.3]$$

En utilisant les dérivées partielles de l'image $I(x, y)$ pour calculer les dérivées de $\vec{S}(x, y)$, on obtient :

$$e = 1 + I_x^2 \quad f = I_x I_y \quad g = 1 + I_y^2 \qquad [12.4]$$

De la même manière, on obtient pour la deuxième forme fondamentale dans la même base, une matrice notée F_2 :

$$F_2 = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$$

Les cœfficients l, m, et n peuvent s'écrire :

$$l = \vec{N}.\vec{S_{xx}} \quad m = \vec{N}.\vec{S_{xy}} \quad n = \vec{N}.\vec{S_{yy}} \qquad [12.5]$$

où $\vec{S_{xx}}, \vec{S_{xy}}, \vec{S_{yy}}$ sont les dérivées secondes de $\vec{S}(x, y)$ le long des axes correspondants et $\vec{N}$ la normale à la surface donnée par :

$$\vec{N} = \frac{\vec{S_x} \wedge \vec{S_y}}{||\vec{S_x} \wedge \vec{S_y}||} \qquad [12.6]$$

En utilisant les dérivées partielles on obtient :

$$\begin{aligned} l &= \frac{I_{xx}}{\sqrt{(1+I_x^2+I_y^2)}} \\ m &= \frac{I_{xy}}{\sqrt{(1+I_x^2+I_y^2)}} \\ n &= \frac{I_{yy}}{\sqrt{(1+I_x^2+I_y^2)}} \end{aligned} \qquad [12.7]$$

Les courbures principales et les directions principales correspondent respectivement aux valeurs propres (k_1 et k_2) et aux vecteurs propres ($\vec{t_1}$ et $\vec{t_2}$) de l'endomorphisme de Weingarten dont la matrice est :

$$W = F_1^{-1}F_2 = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$$

Les cœfficients de W se calculent comme suit :

$$\begin{aligned} w_{11} &= \tfrac{1}{H}(gl - fm) \\ w_{12} &= \tfrac{1}{H}(gm - fn) \\ w_{21} &= \tfrac{1}{H}(em - fl) \\ w_{22} &= \tfrac{1}{H}(en - fm) \qquad (\text{avec} \quad H = eg - f^2) \end{aligned} \qquad [12.8]$$

Par définition K=k_1k_2 est la courbure gausienne et S=$\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ est la courbure moyenne. Ainsi les expressions de K et S sont :

$$\begin{aligned} K &= w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21} = \tfrac{1}{H}(ln - m^2) \\ S &= \tfrac{1}{2}(w_{11}w_{22}) = \tfrac{1}{2H}(en - 2fm + gl) \end{aligned} \qquad [12.9]$$

En utilisant les équations [12.4] et [12.7], K et S sont données par :

$$\begin{aligned} K &= w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21} = \tfrac{1}{H}(ln - m^2) \\ S &= \tfrac{1}{2}(w_{11}w_{22}) = \tfrac{1}{2H}(en - 2fm + gl) \end{aligned} \qquad [12.10]$$

Finalement, les courbures principales k_1 et k_2 sont les solutions d'une équation du second degré donnée par :

$$\begin{aligned} k_1 &= S + \sqrt{S^2 - K} \\ k_2 &= S - \sqrt{S^2 - K} \end{aligned} \qquad [12.11]$$

dont les solutions sont :

$$
\begin{aligned}
k_{1,2} = \frac{1}{2d^{3/2}} \quad & [I_{xx} - 2I_x I_{xy} I_y + I_{xx} I_y^2 + I_{yy} + I_x^2 I_{yy} \\
& \pm[\ I_{xx}^2 + 4I_{xy}^2 - 2I_{xx}I_{yy} + 4I_x^2 I_{xy}^2 + I_x^4 I_{yy}^2 - \\
& \quad 2I_{xx}I_y^2 I_{yy} - 4I_x I_{xx} I_{xy} I_y^3 - 2I_x^2 I_{xx} I_{yy} - \\
& \quad 4I_x I_{xy} I_y I_{yy} + 2I_{xx}^2 I_y^2 + 4I_{xy}^2 I_y^2 + I_{xx}^2 I_y^4 + \\
& \quad I_{yy}^2 + 2I_x^2 I_{yy}^2 - 4I_x^3 I_{xy} I_y I_{yy} - 4I_x I_{xx} I_{xy} I_y + \\
& \quad 2I_x^2 I_{xx} I_y^2 I_{yy} + 4I_x^2 I_{xy}^2 I_y^2 \\
& \ ]^{1/2} \\
&]. \quad (\text{avec} \ \ d = 1 + I_x^2 + I_y^2)
\end{aligned}
\qquad [12.12]
$$

Une fois que k_1 et k_2 sont calculées, les directions principales $\vec{t_1}$ and $\vec{t_2}$ sont les deux vecteurs associés. Si on note $\vec{t_i} = (u_i \ \ v_i)^t$ dans la base $\{\vec{S_x}, \vec{S_y}\}$ on obtient le système d'équations suivant :

$$
\begin{array}{cccl}
(w_{11} - k_i)u_i & + & w_{12}v_i & = 0 \\
w_{21}u_i & + & (w_{22} - k_i)v_i & = 0 \quad i \in 1, 2.
\end{array}
\qquad [12.13]
$$

Soit :

$$
\vec{t_1} = \begin{pmatrix} w_{12} \\ k_1 - w_{11} \end{pmatrix} \qquad \vec{t_2} = \begin{pmatrix} w_{12} \\ k_2 - w_{11} \end{pmatrix} \qquad [12.14]
$$

On définit aussi la courbure maximum $k_{max} = k_1$ comme la courbure principale de plus grande valeur absolue ($|k_1| \geq |k_2|$) et aussi la direction maximum de courbure $\vec{t_{max}} = \vec{t_1}$..

On notera que ces formules n'ont rien à voir avec celles définies précédemment dans le cas des images volumiques car ici l'image I définit directement un paramétrage de l'image.

12.2. Calcul des dérivées partielles de l'image

Les dérivées partielles de l'image peuvent être calculées avec des versions $2D$ des filtres séparables récursifs décrits pour le cas des images volumiques $3D$ (voir chapitre :"Détection de contours").

On peut aussi lisser les données avec un filtre de Gauss et ensuite dériver localement avec de petits masques [154, 168].

On notera que contrairement au cas des images volumiques 3D où le lissage de l'image est invariant par similitude donc intrinsèque à la surface, ici le lissage de la surface dépend de son orientation par rapport au capteur.

12.3. Le travail de de Ponce-Brady

L'algorithme décrit dans [154] se décompose en trois étapes :

• filtrage de l'image par une suite de Gaussiennes d'écarts types σ_i croissants ; on obtient ainsi un ensemble de surfaces S_i et on calcule pour chacune d'elles les courbures et les directions principales ;

• pour chaque surface S_i, on marque les passages par zéro de la courbure de Gauss et les extrémums de la courbure maximum dans la direction associée (points de crête) ;

• les descriptions des surfaces S_i sont mises en correspondance afin de détecter, localiser et décrire les points qui sont des pas, des toits ou des jonctions (voir figures 12.1., 12.2., 12.3.) ;

On trouvera dans [154] une étude du comportement des toits, des jonctions et des pas selon la résolution. Cette étude permet de réaliser de manière efficace l'étape de mise en correspondance.

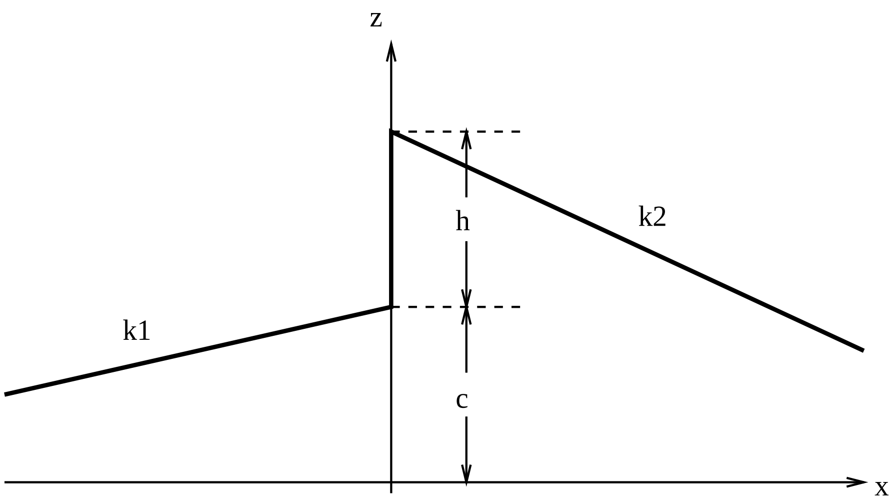

Figure 12.1. *Le modèle du pas consiste en deux demi-plans séparés par une distance h à l'origine.*

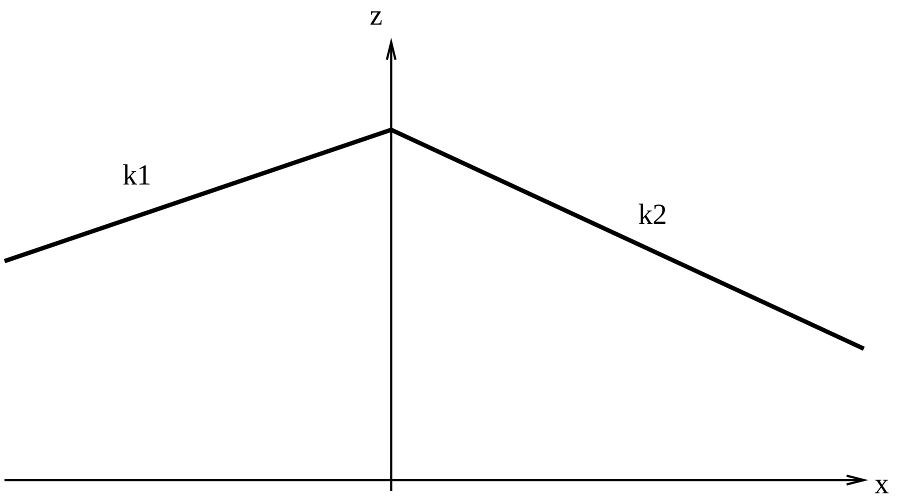

Figure 12.2. *Le modèle du toit consiste en deux demi-plans inclinés joints à l'origine mais ayant des pentes différentes.*

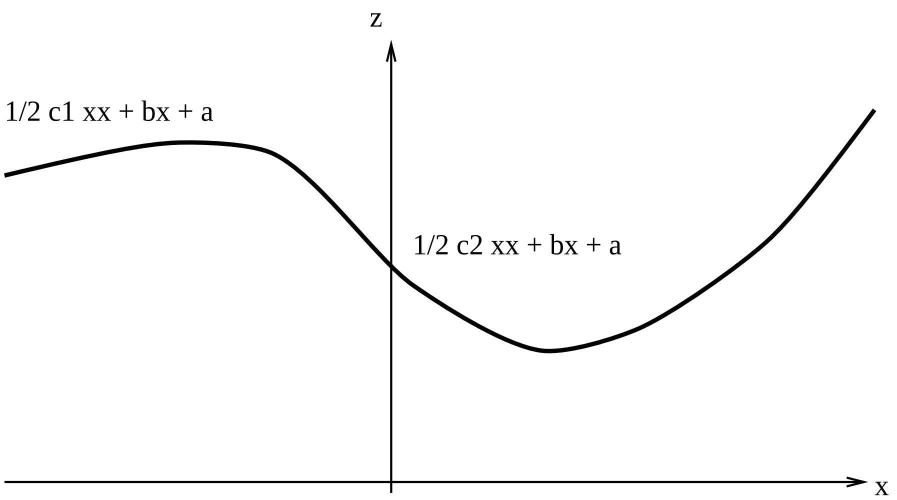

Figure 12.3. *Le modèle de la jonction consiste en deux demi-paraboles ayant des courbures différentes.*

12.4. Extraction de lignes de crête et applications

Si on reprend les notations de la section "Caractéristiques différentielles...", on peut exprimer le critère d'extrémalité défini précedemment pour des iso-surfaces d'images 3D (voir chapitre : "Des images volumiques à la géométrie des surfaces") dans le cas des cartes de profondeur. Soit k_{max} la direction maximum de courbure et $\vec{t_{max}}$ la direction principale associée. Le critère d'extrémalité que nous noterons DMC est par définition la dérivée de la courbure maximum dans la direction principale correspondante soit :

$$DMC = \nabla \vec{k_{max}} \, . \, \vec{t_{max}} \qquad [12.15]$$

où

$$\nabla \vec{k_{max}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial k_{max}}{\partial x} \\ \frac{\partial k_{max}}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \vec{t_{max}} = \begin{pmatrix} w_{12} \\ k_{max} - w_{11} \end{pmatrix} \qquad [12.16]$$

l'expression de DMC peut aussi s'écrire :

$$DMC = (\frac{\partial k_{max}}{\partial x})(w_{12}) + (\frac{\partial k_{max}}{\partial y})(k_{max} - w_{11}) \qquad [12.17]$$

L'expression explicite de DMC est présentée en détail dans ??.

Une fois DMC calculé, on extrait les points tels que $DMC = 0$ (les passages par zéro de DMC).

12.4.1. Extraction des lignes de crête

L'extraction des passages par zéro de DMC pose le même problème que dans le cas $3D$ (voir chapitre : "Des images volumiques à la géométrie des surfaces") du au fait que DMC n'est pas "complètement" un invariant euclidien. On sélectionne ensuite les passages par zéro de DMC telles que la valeur absolue de la courbure maximum k_{max} est plus grande qu'un seuil. Cette étape de seuillage permet de retenir seulement les points où la courbure maximum est localement maximum (les passages par zéro de DMC correspondent à la fois aux maximums et aux minimums de la courbure maximum).

Les principales étapes de l'algorithme d'extraction des lignes de crête sont donc :

1. Calcul des dérivées partielles d'ordre 1,2,3 de l'image : I_x, I_{xx}, I_{xxx}, I_y, I_{yy}, I_{yyy}, I_{xy}, I_{xyy}, I_{xxy}.

2. Calcul des deux courbures principales k_1 et k_2 ainsi que des deux directions principales de courbures $\vec{t_1}$, $\vec{t_2}$.

3. En utilisant les dérivées partielles de l'image, calcul de la dérivée de la courbure maximum selon la direction principale associée (DMC) :

(a) Détermination des points méplats et des ombillics pour les traiter à part.

(b) Calcul de DMC sur les autres points :

$$\begin{cases} \text{si } |k_1| > |k_2| \text{ faire} & k_{max} = k_1 \quad \vec{t_{max}} = \vec{t_1}, \\ \text{sinon} & k_{max} = k_2 \quad \vec{t_{max}} = \vec{t_2}, \\ \text{fin si} & \\ \text{faire} \quad DMC = \nabla \vec{k_{max}} \cdot \vec{t_{max}} & \end{cases}$$

4. Extraction des passages par zéro de DMC : en utilisant l'image de signe (S_{dmc}) de DMC, on extrait les transitions $0 \nearrow 1$ ou $1 \searrow 0$.

5. Sélection des passages par zéro de DMC telles que valeur absolue de la courbure maximum k_{max} est plus grande qu'un certain seuil.

Les étapes 3,4,5 peuvent être remplacées par la détermination des points où la valeur absolue de la courbure maximum est maximum dans la direction principale correspondante. On peut par exemple utiliser un algorithme similaire à celui de l'extraction des maxima locaux de la norme du gradient dans la direction du gradient. On évite ainsi le calcul des dérivées partielles d'ordre 3 mais l'algorithme est "mathématiquement moins propre".

12.4.2. Résultats expérimentaux

Dans cette section, nous présentons des résultats expérimentaux obtenus sur des données synthétiques et réelles. Les images réelles sont des cartes de profondeur et des images de niveaux de gris. Dans les images de niveaux de gris les lignes de crête de la surface image correspondent aux réseaux fins : par exemple les routes dans les images satellites et les vaisseaux sanguins dans les images médicales. Les dérivées partielles sont calculées avec les filtres récursifs approximant le filtre gaussien et ses dérivées (voir chapitre : "Détection de contours").

Les figures 12.4. à 12.8. illustrent la signification des lignes de crête grâce à une image représentant un cercle et un losange avec un bruit blanc gaussien additif. Les figures 12.5., 12.7., et 12.8. montrent en particulier la différence entre la détection de contours et l'extraction de lignes de crête.

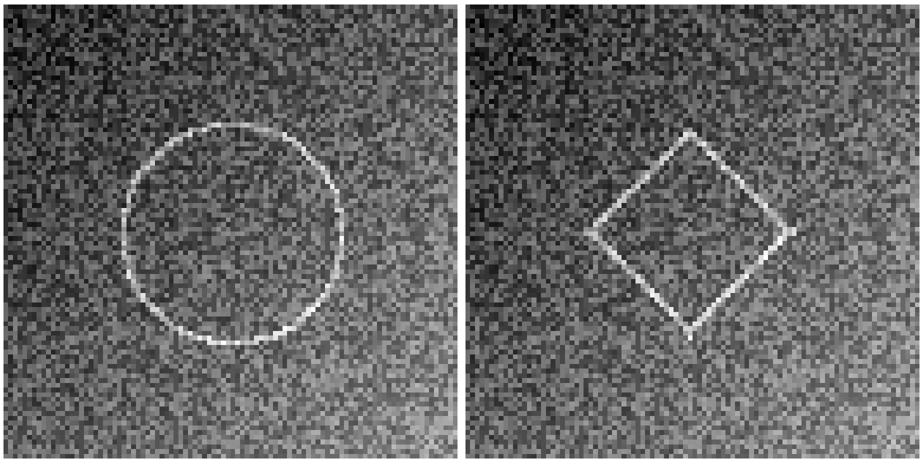

Figure 12.4. *Images originales : Cercle et losange avec un bruit blanc gaussien additif.*

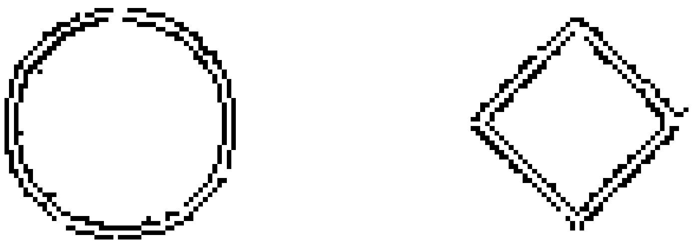

Figure 12.5. *Détection de contours par les filtres gaussiens ($\sigma = 1$).*

Les figures 12.9. à 12.12. montrent les résultats obtenus sur des cartes de profondeur décrivant des surfaces [51]. Les figures 12.9. à 12.10. illustrent l'algorithme sur deux surfaces quadriques. Les figures 12.11. à 12.18. montrent les

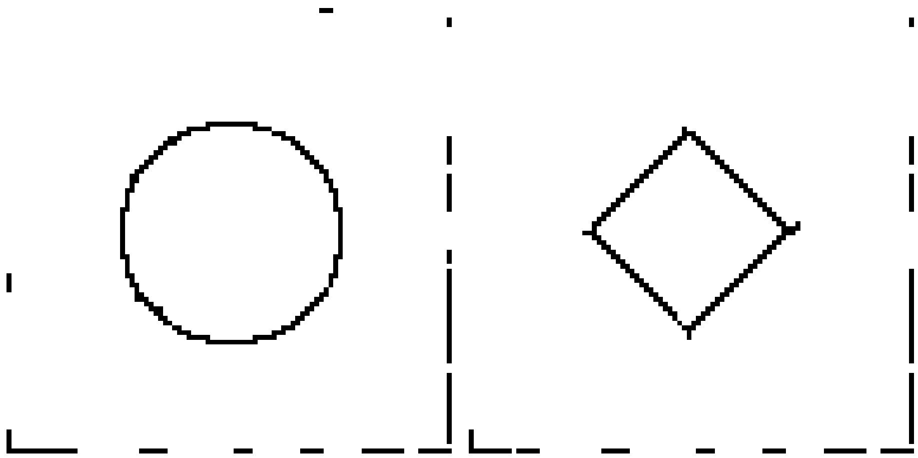

Figure 12.6. *Extraction des lignes de crête, en utlisant les passages par zéro de DMC puis un seuillage de* k_{max}

lignes de crête obtenues sur des cartes de profondeur de visages fournies par un algorithme de vision stéréoscopique [63].

Les figures 12.13. à 12.18. présentent les résultats obtenus sur des images satellites.

Les figures 12.19. et 12.20. présentent des résultats obtenus sur des images médicales obtenues par DSA (Digital Substraction Angiography).

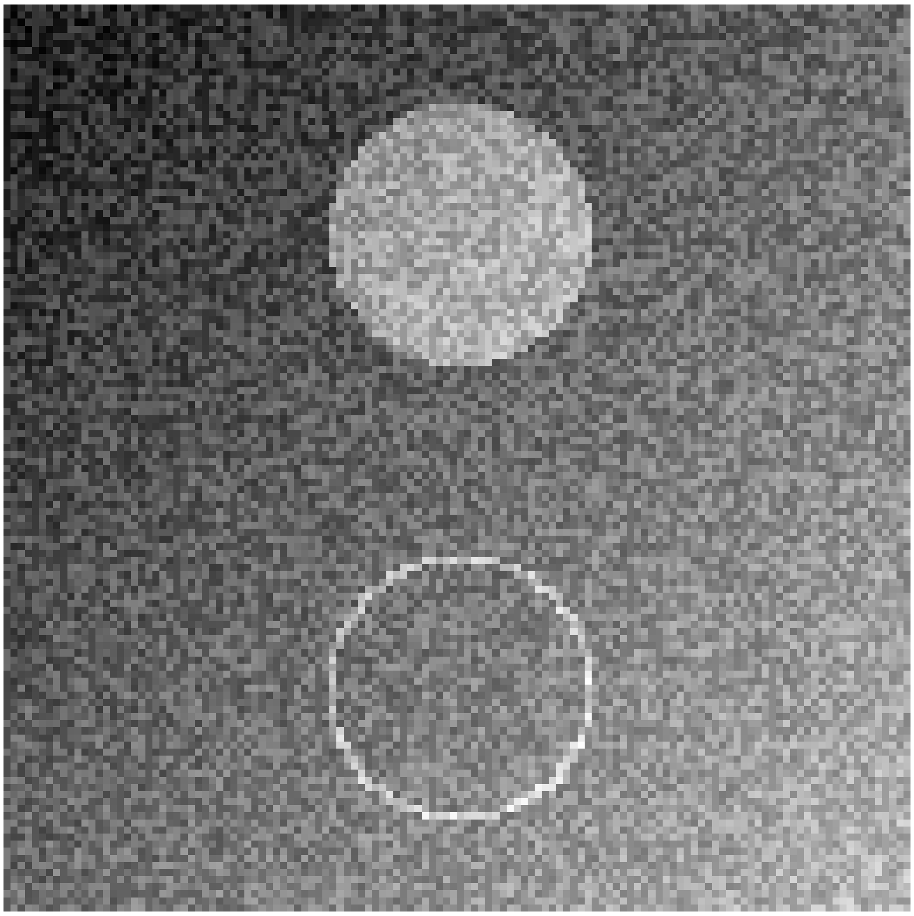

Figure 12.7. *Images originales avec un bruit blanc Gaussien additif*

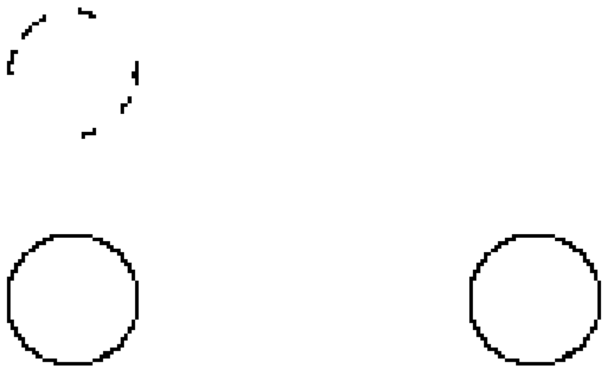

Figure 12.8. *Extraction des lignes de crête . Gauche : seuillage de k_max à 0.5. Droite : seuillage de k_max à 0.8.*

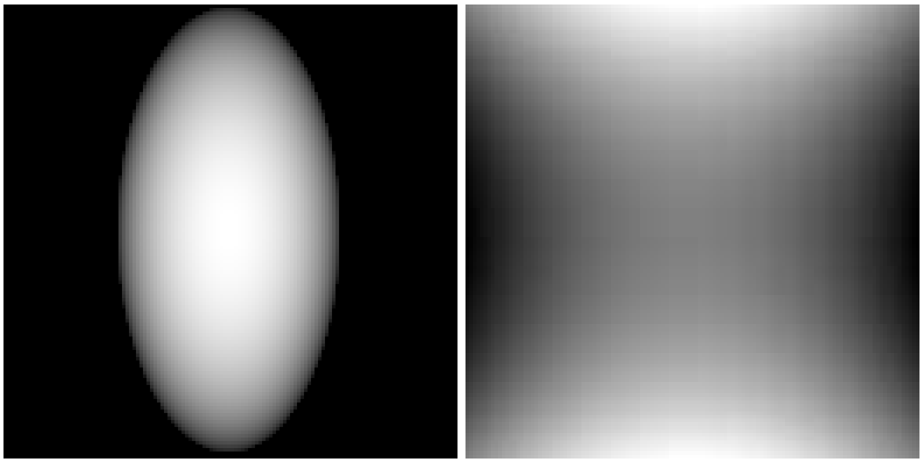

Figure 12.9. *Modèles de quadriques. Gauche : ellipsoide. Droite : hyperboloide parabolique.*

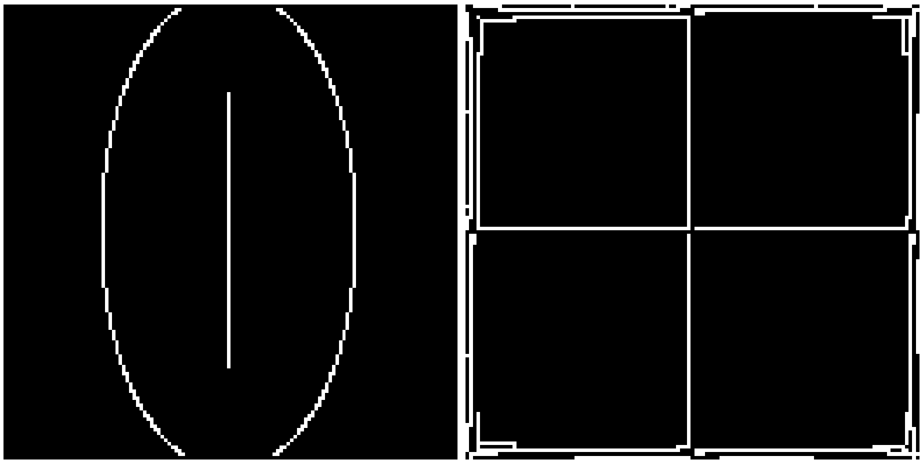

Figure 12.10. *Maxima de la courbure maximun le long de la direction principale associée. Gauche : ellipsoide. Droite : hyperboloide parabolique.*

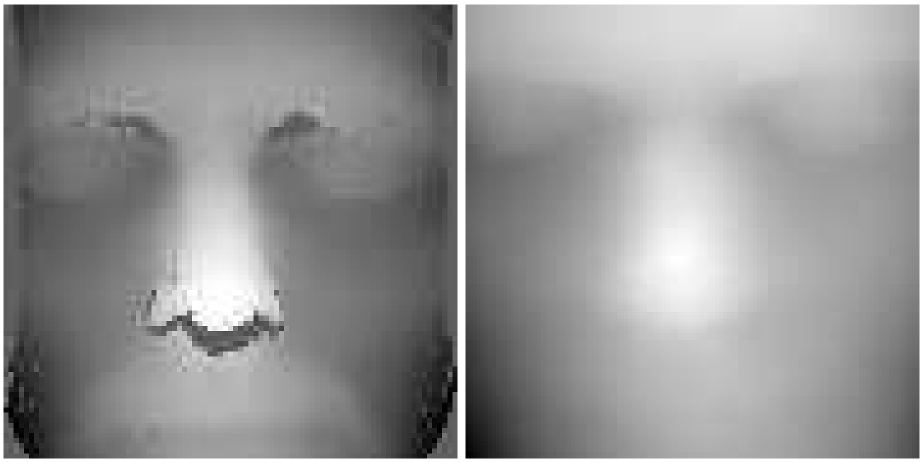

Figure 12.11. *Cartes de profondeur. Droite : Benoît; Gauche : Bernard*

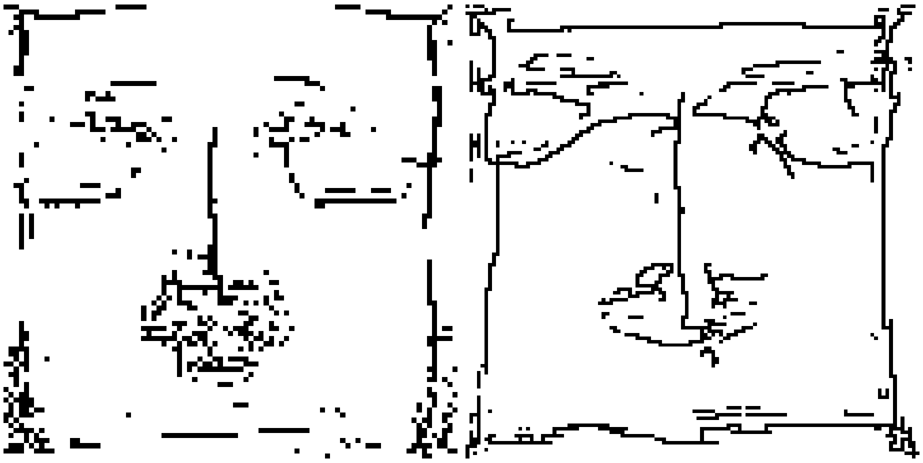

Figure 12.12. *Lignes de crête. Droite : Benoît; Gauche : Bernard*

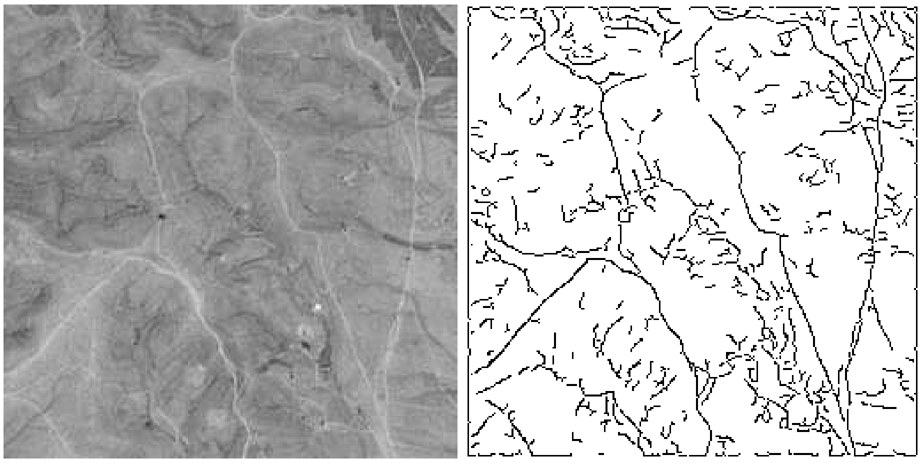

Figure 12.13. *Gauche : Image originale. Droite : Lignes de crêtes .*

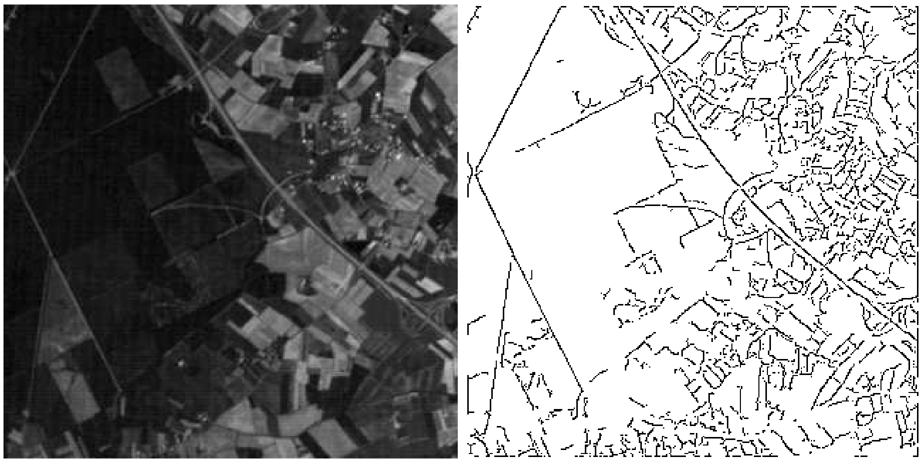

Figure 12.14. *Gauche : Image originale. Droite : Lignes de crêtes .*

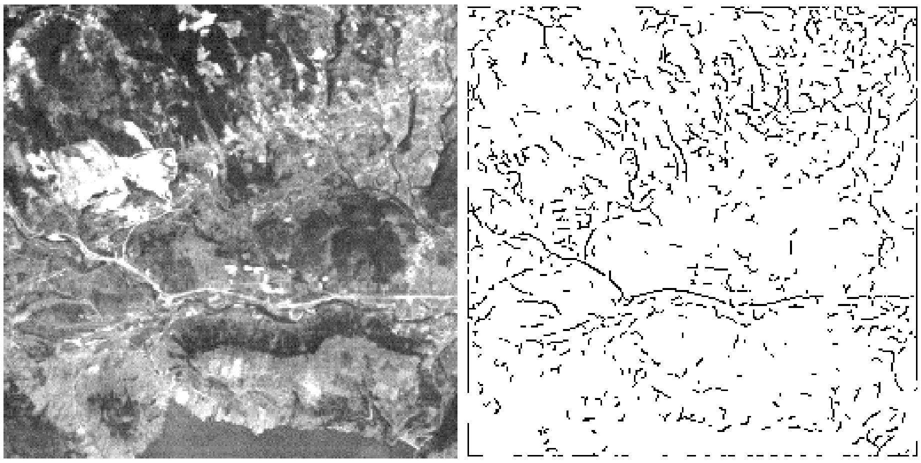

Figure 12.15. *Gauche : Image originale. Droite : Lignes de crêtes .*

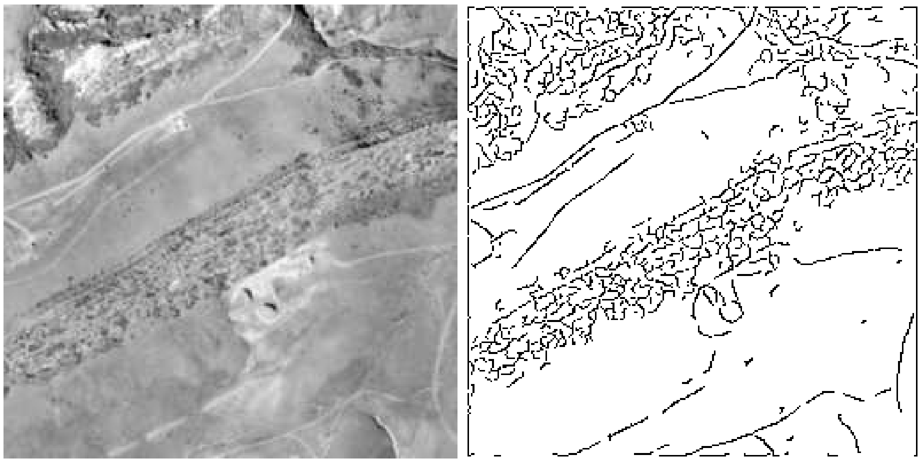

Figure 12.16. *Gauche : Image originale. Droite : Lignes de crêtes .*

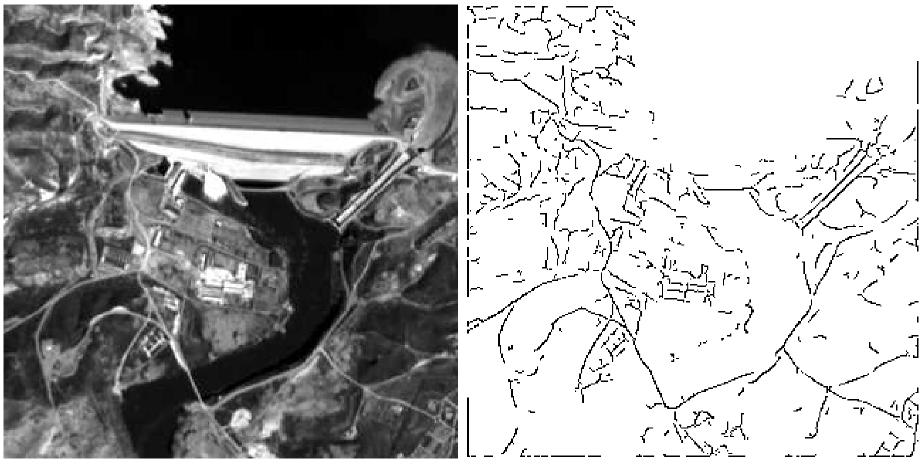

Figure 12.17. *Gauche : Image originale. Droite : Lignes de crêtes .*

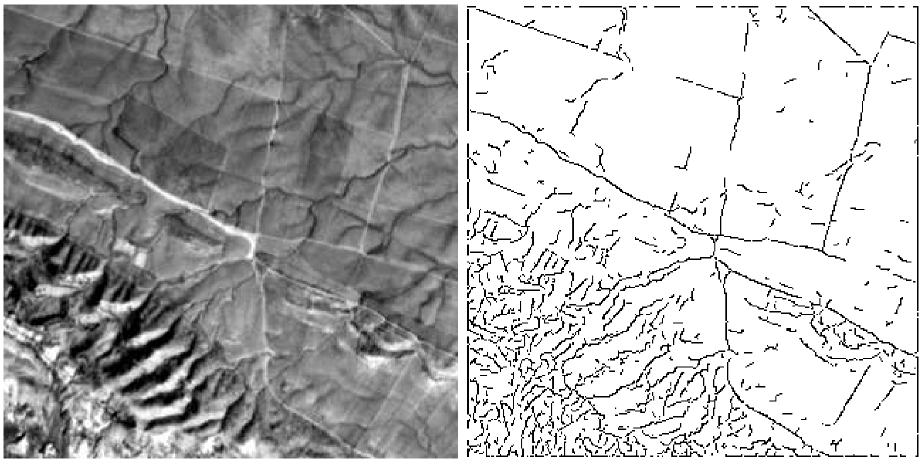

Figure 12.18. *Gauche : Image originale. Droite : Lignes de crêtes .*

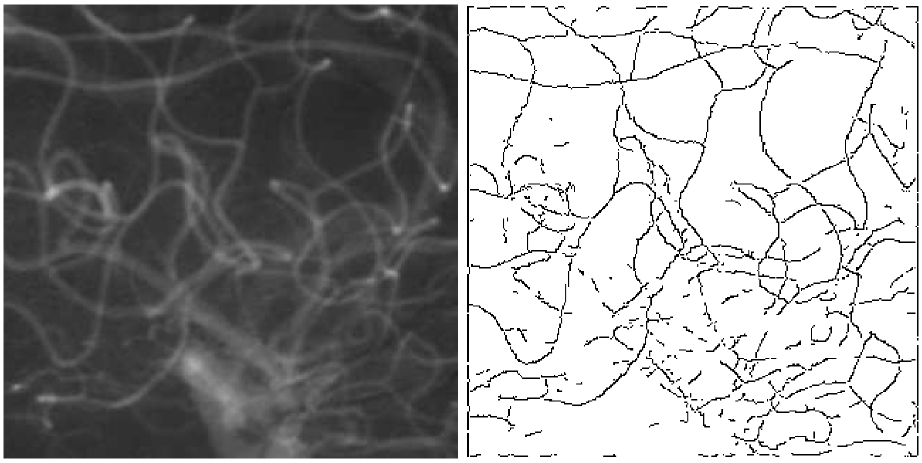

Figure 12.19. *Gauche : Image originale de vaisseaux sanguins obtenue par DSA. Droite : Extraction des lignes de crête* ($\sigma = 1$)

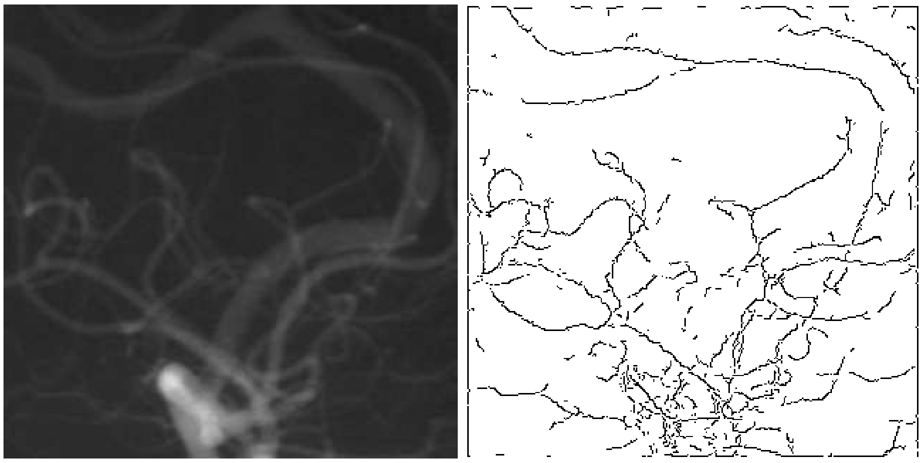

Figure 12.20. *Gauche : Image originale de vaisseaux sanguins obtenue par DSA. Droite : Extraction des lignes de crête ($\sigma = 1$)*

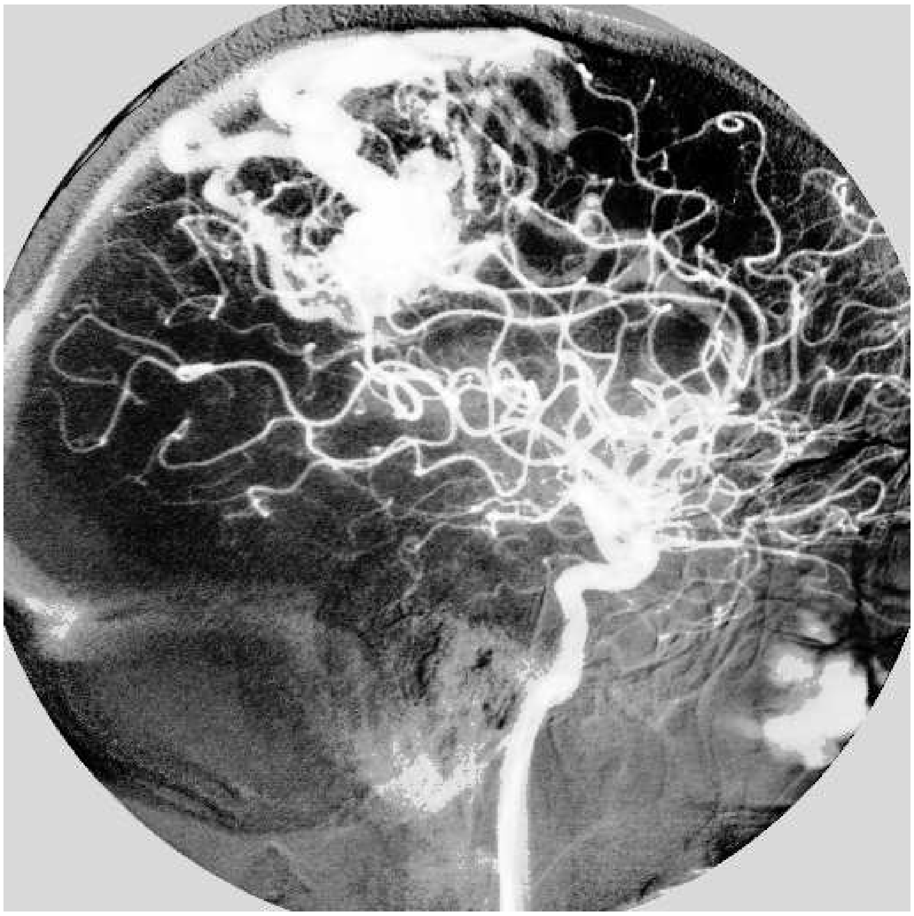

Figure 12.21. *Arbre vasculaire cérébral obtenu par DSA*

12.5. Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre que les algorithmes décrits dans le chapitre précédent s'adaptent aux cartes de profondeur. Cette adaptation demande néanmoins des développements mathématiques sensiblement différents.

L'extraction de singularités différentielles à partir non plus de cartes de profondeur mais de la surface image définie par une image de niveaux de gris quelconque, ouvre des horizons intéressants. En effet, ce type de méthode

Figure 12.22. *Lignes de crêtes obtenues sur l'arbre vasculaire cérébral*

permet de détecter des indices visuels plus sophistiqués que des contours en marche d'escalier et ouvre ainsi des espaces nouveaux. On a vu un exemple pour l'extraction de réseaux fins.