Chapitre 11

Des images volumiques 3D à la géométrie des surfaces

Dans ce chapitre nous décrivons l'extraction et la caractérisation de surfaces à partir d'images volumiques 3D. Nous présentons des résultats expérimentaux obtenus sur des images médicales.

11.1. Détection de contours 3D

De nombreuses applications industrielles ou médicales fournissent des images 3D représentant une information volumique. Les techniques modernes comme la tomographie (CT) produisent des images 3D où le niveau de gris est proportionnel à la densité locale. Par exemple, dans le domaine biomédical des images 3D sont obtenues par résonance magnétique nucléaire (IRM), scanner X, ou échographie. Ainsi pour de telles données les volumes présentant une distribution homogène en niveaux de gris correspondent aux entités de la structure 3D. Ces volumes peuvent être obtenus soit en partitionnant l'image 3D en zones homogènes (approche régions), ou en identifiant les discontinuités des niveaux de gris correspondant à la trace des surfaces (approche contours). La segmentation d'images 2D ou 3D en régions pose le délicat problème de trouver des critères d'homogénéité adéquats. On remarque que les algorithmes de segmentation décrits dans le chapitre 4 s'adaptent naturellement à la segmentation des images 3D. Malgré cette adéquation on choisit le plus souvent une approche contour qui semble, pour ce problème, avoir de meilleures qualités de stabilité et un moindre coût calculatoire. La plupart des approches comprennent deux étapes successives : détection de contours 3D par filtrage puis suivi de contours 3D en utilisant des propriétés morphologiques.

Ainsi une première étape pour identifier ces surfaces est de rechercher leur trace en utilisant seulement l'information du signal. Les points des surfaces sont localisés où le gradient de la fonction des niveaux de gris est localement maximum. On retrouve le problème classique de la détection de contours largement étudié pour des images 2D [32, 44, 165], mais beaucoup moins dans le cas 3D. A la base, la détection de contours 2D ou 3D posent le même problème, soit la détection des discontinuités d'une fonction discrète et bruitée (2D ou 3D).

La plupart des opérateurs de détection de contours 3D sont issus d'une généralisation en 3D des opérateurs 2D [185, 135]. Leur principe est d'approximer le gradient ou le laplacien de l'image en utilisant des masques de convolution. Un compromis entre la taille des masques de convolution et leurs performances de détection et de localisation est alors à trouver. Particulièrement dans le cas 3D, la taille parfois considérable des données rend la complexité algorithmique et l'espace mémoire essentiels pour la détection de contours. Ainsi la taille des masques de convolution utilisés pour implanter l'opérateur ne peut être trop importante afin d'éviter un coût calculatoire trop élevé. La convolution d'une image 3D $dimx \times dimy \times dimz$ par un masque $n \times n \times n$ coûte $o(n^3 dimxdimydimz)$. Par exemple cette complexité rend quasiment impossible (sur une machine séquentielle classique) l'utilisation de masques de taille plus importante que $5 \times 5 \times 5$ pour une image $512 \times 512 \times 100$. Ainsi une limitation importante de la plupart des opérateurs (linéaires) de détection de contours 3D réside dans l'utilisation de petits masques de convolution très sensibles au bruit. Une autre difficulté, théorique celle-ci, posée par la détection de contours 3D, et que partage d'ailleurs le cas 2D, est l'estimation des performances des opérateurs. En effet, le plus souvent, on dérive des opérateurs 2D ou 3D d'opérateurs 1D optimaux par rapport à un modèle monodimensionnel. Une question intéressante est alors posée par l'évaluation des performances des opérateurs pour des modèles non plus 1D mais 2D ou 3D. Des réponses partielles à ces deux problèmes (complexité et évaluation théorique des performances) sont amenées par le filtrage séparable récursif et une généralisation en 2D et 3D des critères de Canny [134].

A cause du bruit, cette étape de filtrage n'est parfois pas suffisante pour obtenir des résultats pouvant être utilisés pour la reconstruction et la modélisation des surfaces. De manière à améliorer la carte des contours 3D, il peut être utile d'introduire des informations morphologiques [120]. On peut par exemple utiliser un algorithme de suivi de contours 3D résultant d'une extension d'une méthode de fermeture de contours 2D [47].

11.1.1. Gradient et laplacien d'une image 3D

Le filtrage s'implante par cascade de filtrages récursifs 1D et est décrit au chapitre 2 pour le cas 2D. Le cas 3D est une simple généralisation.

Une fois le filtre et le type d'approche choisis (voir chapitre 2), nous calculons le gradient ou le laplacien comme suit : Soit $I(x, y, z)$ une image 3D et $G(x, y, z)$ le gradient de I :

$$G = (\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial z})^t$$

Le calcul des composantes du gradient est réalisé en calculant des images (D_i) correspondant aux dérivées par rapport à $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ par une cascade de filtrage 1D comme suit :

$$\begin{array}{l} \text{pour } i = 1, 2, 3 \text{ faire} \\ \left[\begin{array}{l} D_i = I \\ \text{pour } j \in [1, 2, 3] \backslash \{i\} \text{ faire} \\ [D_i = D_i \star s(x_j) \\ D_i = D_i \star d(x_i) \end{array} \right. \end{array}$$

où $s(x)$ et $d(x)$ sont respectivement les opérateurs de lissage et de dérivée première ($d(x) = s'(x)$ aux constantes de normalisation près).

Pour une image de dimensions $dimx \times dimy \times dimz$ le calcul des composantes du gradient demande 3 convolutions par point. Ainsi, nous obtenons pour la totalité du calcul $3dimxdimydimz$ convolutions par point. Si on utilise une implantation directe avec un masque de convolution 1D de taille k, nous obtenons une complexité de l'ordre de : $3kdimxdimydimz$. Un filtre récursif d'ordre r permet de la réduire à : $3rdimxdimydimz$.

Le laplacien peut être calculé en additionnant les dérivées secondes. Le calcul des dérivées secondes peut être réalisé en utilisant le même algorithme que pour les dérivées premières où on remplace l'opérateur de dérivée première d par l'opérateur de dérivée seconde. On peut aussi calculer directement le laplacien par filtrage récursif, ce qui permet de diminuer le coût du filtrage [44].

11.1.2. Performances des filtres 3D

La prise en compte de modèles de contours 3D même aussi élémentaires qu'un contour orienté nécessite un effort théorique pour évaluer les performances des opérateurs. Le calcul présenté au chapitre 2 section 2.7. montre que par exemple dans le cas du filtre Deriche, les valeurs des critères de détection et de localisation dépendent de l'orientation du contour. L'utilisation de modèles plus complexes incluant des angles et des courbures est certainement intéressante à condition de pouvoir aboutir à des algorithmes de complexité raisonnable...

11.1.3. Traitements en aval : maxima locaux, seuillage

Bien que le calcul du gradient ou du laplacien 3D constitue la partie essentielle de la détection de contours, cette étape ne fournit pas directement les points de contours. Ces étapes complémentaires diffèrent selon l'approche (gradient ou laplacien).

11.1.3.1. Approche gradient

On suppose que les contours soient localisés où la norme du gradient est extremum le long de la direction du gradient :

$$\nabla(\sqrt{(\frac{\partial I}{\partial x})^2 + (\frac{\partial I}{\partial y})^2 + (\frac{\partial I}{\partial z})^2}).\nabla(I) = 0$$

où ∇ est l'opérateur gradient et I l'image.
Dans la pratique, on détermine les points de contours en dérivant localement la norme du gradient dans la direction du gradient. Par rapport au calcul direct du critère cette méthode a l'avantage de ne pas calculer explicitement les dérivées secondes.
Dans les images réelles le bruit introduit des extremums locaux du gradient qui ne correspondent pas à des points de contours. Pour les éliminer on utilise un seuillage par hystéresis 3D [135]. Ce type de seuillage prend en compte la connexité des points et permet d'améliorer la continuité des contours. On peut

améliorer cette méthode en rajoutant une contrainte de suivi dans la direction du plan tangent [134].

La figure 11.1. présente le résultat d'une détection de contour 3D par filtrage séparable récursif (filtre Deriche) avec une approche gradient sur une image de crâne obtenue par scanner X.

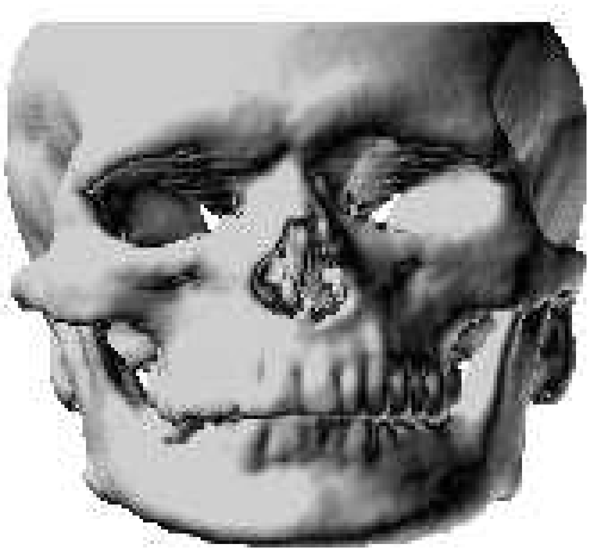


Figure 11.1. *Vue en perspective du résultat d'une détection de contours 3D (filtre de Deriche 3D) pour une image de crâne obtenue par scanner X.*

11.1.3.2. Approche laplacien

Dans cette approche (voir chapitre 2 section 2.4.2) on suppose que les points de contours correspondent aux passages par zéro du laplacien soit :

$$\Delta I = 0$$

De manière à déterminer les points qui annulent le laplacien on crée une image de polarité où les points de laplacien positif sont à 1 et les autres à 0. Les transitions 1-0 (théorème des valeurs intermédiaires) définissent les passages par zéro. Comme pour les extréma locaux du gradient, on obtient des passages par zéro ne correspondant pas à des contours. De manière à les supprimer, on rajoute, comme pour l'approche gradient, une dernière étape de seuillage nécessitant le calcul du gradient aux points de passage par zéro.

11.1.4. Suivi de contour 3D

Dans les parties d'image fortement dégradées, les informations locales ne suffisent pas à détecter les contours. Une idée classique est de décider si un point appartient à un contour en fonction d'une conjonction d'informations locales. Cette conjonction se définira, par exemple, par un chemin optimal dans un graphe valué prenant en compte des informations de gradient et de variation de la courbure.

On peut étendre au cas 3D une méthode de fermeture de contours 2D proposée par R. Deriche et J.P. Cocquerez [47] (voir chapitre 4, section 4.5). Le principe de cet algorithme est de déterminer des points de contours à priori fiables (en fonction de critères pré-définis) et d'utiliser ensuite une méthode de suivi/fermeture permettant de compléter les contours.

11.1.5. Conclusion

Ces algorithmes ont été implantés et testés sur des images IRM, scanner X, et échographiques. Les résultats obtenus se comparent favorablement aux autres méthodes existantes tant du point de vue de la qualité des contours que du coût calculatoire. Les bonnes propriétés des filtres exponentiels et l'implantation séparable récursive expliquent les performances de ces filtres 3D par rapport aux opérateurs classiques. De plus, le suivi de contour permet encore une petite amélioration des résultats.

11.2. Des contours 3D aux courbures et aux lignes de crête

Dans la partie précédente on a décrit des méthodes fournissant des points formant la trace discrète de surfaces. Cette nouvelle représentation de l'information image est plus compacte et manipulable que les données brutes. Néanmoins, si on veut résoudre automatiquement (ou presque) des problèmes de recalage ou de mise en correspondance, elle reste peu satisfaisante. D'où l'intérêt suscité par les travaux sur la caractérisation des surfaces à partir d'une trace discrète obtenue par détection de contours 3D [161, 162] ou capteur laser [27, 154]. Dans le cas de surfaces polyédriques, des algorithmes d'approximation par facettes planes peuvent être utilisés [60]. Lorsque les surfaces sont gauches, des algorithmes d'approximation par morceaux de surfaces quadriques existent [60]. Mais ces méthodes soulèvent le même problème que les algorithmes de segmentation d'images : la définition de propriétés d'homogénéité permettant l'obtention d'un partitionnement stable. Ainsi la plupart des approches existantes [161, 162, 27, 154] repose sur l'extraction de caractéristiques différentielles locales du second ou du troisième ordre de la surface tracée par les contours : courbures, lignes de crête (lignes où la courbure est localement maximum)...Le plus souvent, les méthodes existantes déconnectent l'étape de filtrage-détection de contours de la modélisation des surfaces. On obtient ainsi des algorithmes pas toujours très robustes au bruit car ne prenant en compte le plus souvent que la position des points. Une idée développée récemment consiste à utiliser l'étape de filtrage de l'image 3D afin d'assurer une meilleure cohérence des résultats [133, 132, 168]. Ce principe est similaire à celui de l'algorithme présenté par J. Ponce et M. Brady pour des images 2D de profondeur [154].

11.2.1. Rappels de géométrie différentielle

11.2.1.1. Notion de courbure

Avant d'introduire les deux formes fondamentales, il nous a semblé utile de rappeler de façon très précise la notion géométrique de courbure (voir figure 11.2.). On considère pour cela un point M_0 situé sur un arc γ. Alors, [109] :

"Pour tout $M \in \gamma$ et suffisamment voisin de M_0 , il existe un cercle unique γ_M tangent à γ en M_0 et passant par M ; et le *cercle osculateur* à γ en M_0 est la limite de γ_M quand M tend vers M_0 sur γ."

La courbure en M_0 est égale à l'inverse du rayon du cercle osculateur. La courbure en un point M_0 d'une surface le long d'une direction $\vec{d}$ du plan tangent correspondra à la courbure de la courbe plane obtenue par intersection

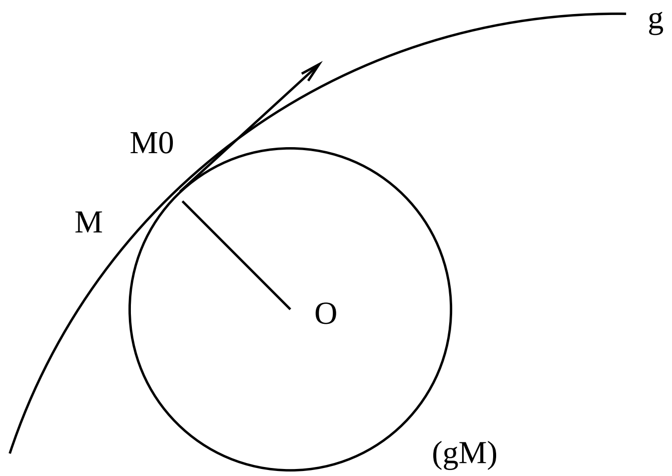


Figure 11.2. *Courbure sur une courbe régulière dans un plan.*

de la surface et du plan normal P_{M_0} (voir figure 11.3.), d'où le terme spécifique de *courbure normale*. On verra plus loin que la courbure normale selon une direction quelconque s'exprime en fonction de deux courbures (courbures principales) correspondant à deux directions orthogonales.
Nous nous placerons dans la suite de ce paragraphe dans le cadre d'une surface paramétrée, notée S, par $U \times V$ dont le couple générique sera noté (u, v). On notera X l'application définie de $U \times V$ dans S qui fait correspondre à tout couple (u, v) le point $X(u, v)$ [49]. On supposera cette surface régulière, c'est-à-dire que l'application X est continue et dérivable à tout ordre.

11.2.1.2. Première forme fondamentale

Soit P un point de S, et T_P son plan tangent engendré par la base ($\vec{X}_u = \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}, \vec{X}_v = \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}$), la *première forme fondamentale* I permet de définir une métrique liée au plan tangent. Soit $\vec{w} \in T_P$,

$$I(\vec{w}) = \vec{w}^t M_1 \vec{w}$$

où $M_1 = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ $E = <\vec{X}_u, \vec{X}_u>$ $F = <\vec{X}_u, \vec{X}_v>$ $G = <\vec{X}_v, \vec{X}_v>$

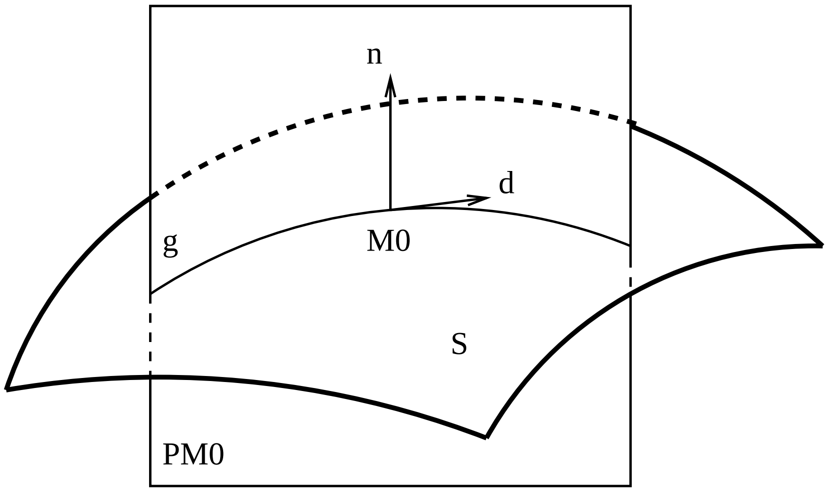


Figure 11.3. *Courbure normale sur une surface.*

E, F, G sont appelés *cœfficients de la première forme fondamentale*. Concernant le déterminant de cette première forme fondamentale, il est à noter la relation intéressante suivante puisqu'elle fait le lien entre les deux formes fondamentales. En effet, le calcul de la courbure implique de dériver des vecteurs normés :

$$\| \vec{X}_u \wedge \vec{X}_v \| = \sqrt{EG - F^2}$$

La première forme fondamentale définit la variation de la position d'un point dans l'espace du plan tangent pour une variation des paramètres ; ce qui revient à exprimer le vecteur reliant $X(u,v)$ et $X(u+du, v+dv)$ dans le repère du plan tangent ayant pour d'origine le point considéré et de vecteurs directeurs $(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v})$; cela correspond à la relation existant entre les distances dans l'espace des paramètres et dans l'espace du plan tangent.

11.2.1.3. Deuxième forme fondamentale

On définit d'abord l'*application de Gauss*, notée N, ainsi : elle associe à tout point de la surface son vecteur normal unitaire :

$$N \ : \ U \times V \longrightarrow S(1) \ \textit{sphère unitaire}$$

$$(\ u\ ,\ v\ )\ \longmapsto\ \vec{N}_{(u,v)}$$

On introduit alors l'*endomorphisme de Weingarten*, noté dN, définissant une application (linéaire) du plan tangent sur lui-même qui associe à tout vecteur tangent le vecteur représentant la variation de la normale le long de cette direction. Ce vecteur appartient bien au plan tangent : soit en effet $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ une courbe sur S passant par $P = \alpha(0)$ et de tangente en P de direction $\vec{w} = \vec{\alpha'(0)}$,

$$dN(\vec{w}) = \vec{N}_u u' + \vec{N}_v v'$$

$$\text{Or} \quad <\vec{N}, \vec{N}>= 1 \Rightarrow \vec{N}_u \perp \vec{N}, \vec{N}_v \perp \vec{N} \Rightarrow \vec{N}_u, \vec{N}_v \in T_P \Rightarrow dN(\vec{w}) \in T_P$$

$dN(\vec{w})$ correspond en fait à la dérivée directionnelle de l'application de Gauss N selon $\vec{w}$.

La *deuxième forme fondamentale* est la forme quadratique associée à l'endomorphisme de Weingarten. Elle permettra en fait de calculer la courbure normale en un point de la surface le long d'une direction donnée, c'est-à-dire l'inverse du rayon du cercle *osculateur*. Sa matrice associée, notée M_2 , s'écrit :

$$M_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

avec $e =< \vec{N}, \vec{X}_{uu} >$ $f =< \vec{N}, \vec{X}_{uv} >$ $g =< \vec{N}, \vec{X}_{vv} >$
e, f, g sont appelés *cœfficients de la deuxième forme fondamentale.* De plus, on a la relation suivante :

$$dN(\vec{w}) = W\vec{w}$$

$$\text{avec} \ \ W = \ -M_1^{-1}\ M_2$$

La deuxième forme fondamentale définit la variation de la normale en un point pour une variation des paramètres ; elle caractérise donc les relations entre $N(u,v)$ *et* $N(u+du, v+dv)$ *dans le repère lié au plan tangent* $(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v})$ *; l'endomorphisme de Weingarten caractérise la variation de la position de la normale pour un déplacement du point dans le plan tangent et a logiquement comme matrice associée* $M_1^{-1} M_2$.

11.2.1.4. Courbures principales et directions principales de courbure

On démontre aisément que l'endomorphisme de Weingarten est une application linéaire auto-adjointe. Ainsi, il existe une base orthonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan tangent, telle que :

$$dN(\vec{e}_1) = \lambda_1.\vec{e}_1 \quad \text{et} \quad dN(\vec{e}_2) = \lambda_2.\vec{e}_2$$

et λ_1 et λ_2 sont respectivement le maximum et le minimum de la forme quadratique associée, c'est-à-dire de la deuxième forme fondamentale (pour une démonstration complète, voir [49, 103]).

λ_1 et λ_2 sont appelées *courbures principales*, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ étant les *directions principales de courbure* associées. Le produit $\lambda_1\lambda_2$ se nomme *courbure gaussienne*, la demi-somme $(\lambda_1 + \lambda_2)/2$ *courbure moyenne*. Il est à noter que l'orientation de la surface détermine le signe des courbures, la courbure gaussienne étant elle invariante dans $\mathcal{R}^3$. On remarquera que la connaissance des deux courbures principales permet de déterminer la courbure dans une direction quelconque [49].

D'autre part, on appelle *ligne de courbure* une courbe portée par la surface telle qu'en chaque point, la tangente à la courbe soit une direction principale de courbure. On sait ainsi qu'en chaque point régulier de S, il passe deux lignes de courbure orthogonales (voir [109], page 527).

11.2.1.5. Courbure et direction maxima de courbure

La courbure maximum est la courbure principale de plus grand module et la direction maximum de courbure la direction correspondante.

11.2.1.6. Points ombilics

Lorsque les deux courbures principales sont égales, la courbure est identique dans toutes les directions (voir figure 11.4.). On dit alors que le point est un ombilic (la surface est localement sphérique au voisinage).

11.2.1.7. Points hyperboliques, elliptiques et lignes paraboliques

Un point dont la courbure gaussienne est négative est dit hyperbolique. Cela correspond à la notion de point selle : la courbure est de sens opposé le long

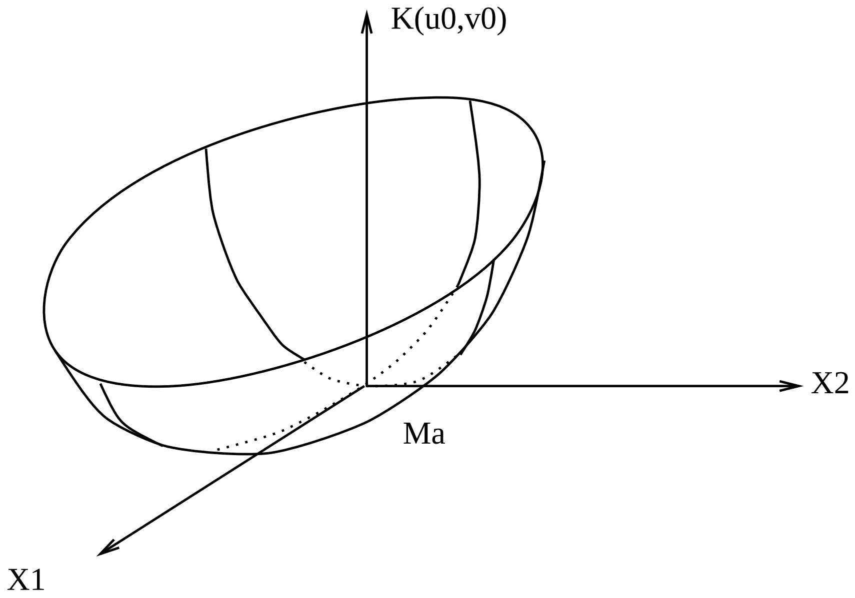


Figure 11.4. *Forme de la surface au voisinage d'un point ombilic.*

des deux directions principales (voir figure 11.5.).

Un point dont la courbure gaussienne est positive est dit elliptique. La surface est alors localement un ellipsoïde (voir figure 11.6.).

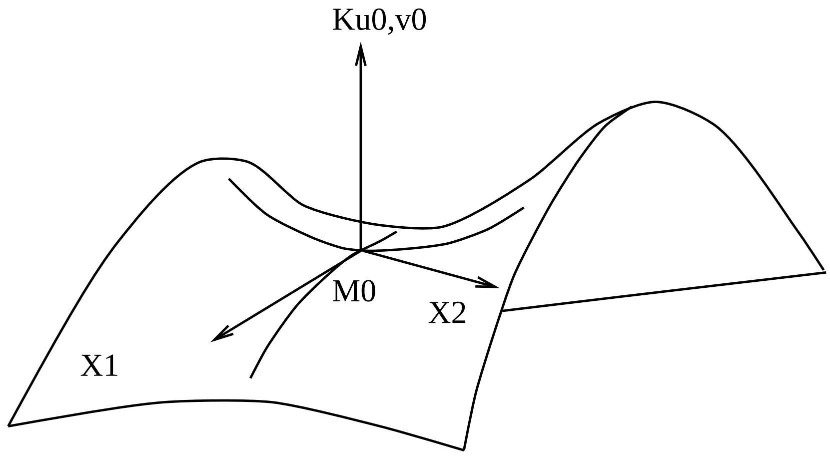
Un point dont la courbure gaussienne est nulle est dit parabolique. La surface admet alors une courbure non nulle selon une seule direction principale.

On montre que les points paraboliques forment des lignes séparant les zones de points hyperboliques des zones de points elliptiques. Ces lignes sont appelées lignes paraboliques.

11.2.1.8. Définition d'un extremum de courbure

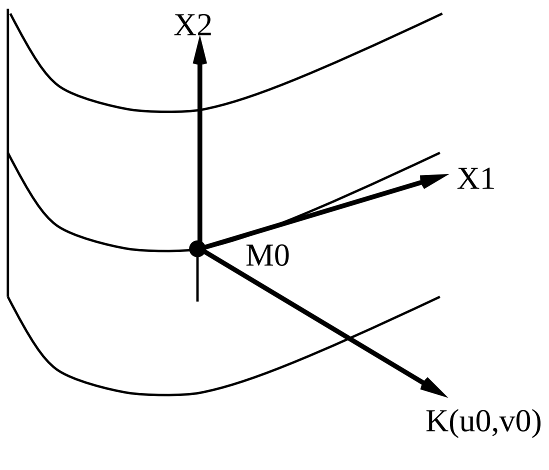
On dira qu 'un point m de S est un *extremum de courbure* s'il est un maximum local de la courbure principale maximum (c'est à dire de plus forte valeur absolue) dans la direction principale de courbure associée. Cette définition est à rapprocher de celle d'un point de contour qui est défini comme un extremum de la norme du gradient dans la direction du gradient [134].

Une définition proche est fournie par Yuille et Leyton [181] qui présentent



Forme de la surface au voisinage de M0

Figure 11.5. *Forme de la surface au voisinage d'un point hyperbolique.*



Forme de la surface au voisinage de M0

Figure 11.6. *Forme de la surface au voisinage d'un point parabolique.*

les extremums de courbure comme les extremums de la courbure principale le long des lignes de courbure. Ils démontrent avec cette définition qu'on peut associer à chaque point extremum de courbure des axes de symétrie de la surface, et que cette propriété, de plus, les caractérisent. Kœnderink passe par l'intermédiaire des "centro-surfaces", qui sont les surfaces formées par les centres de courbures principaux. Cet auteur énonce que à chaque point singulier de celles-ci correspond un point de crête [106].

11.2.2. Approximation locale de surface

On dispose donc d'un ensemble de points 3D formant la trace discrète d'une surface dont on recherche les courbures et les lignes de crête. Ces points définissent explicitement un graphe d'adjacence. Une approche naturelle pour calculer ces courbures est d'approximer localement la trace au voisinage de chaque point par une surface analytique (au moins du second ordre). Une méthode de ce type se caractérise essentiellement par :

1. les données utilisées : points, normales, incertitudes... ;

2. le modèle local : quadrique, spline...

3. la méthode d'ajustement : moindres carrés, moindres carrés médian, filtre de Kalman...

4. le voisinage pris en compte : fixe, adaptatif...

11.2.2.1. Données prises en compte

L'étape de détection de contours 3D fournit un ensemble de points $P = \{P_1, P_2, \ldots P_n\}$ et les gradients 3D correspondants $G = \{\vec{G_1}, \vec{G_2}, \ldots \vec{G_n}\}$ où $\vec{G_i}$ est le gradient au point P_i (voir chapitre 2, section 2.2.2).

Si on suppose que les points de P sont la trace d'une surface et que chaque point P_i séparant localement deux zones homogènes alors les vecteurs $\vec{G_i}$ approximent les normales à la surface. On peut donc prendre en compte ces normales pour réaliser l'approximation locale. De plus ces points et ces gradients provenant d'une opération de filtrage on peut déterminer les matrices de covariance associées à leurs incertitudes comme suit :

Soit $I(i,j,k)$ la fonction des niveaux de gris de l'image 3D.
Le résultat de la détection de contours s'exprime comme quatre images $C(i,j,k)$, $G_x(i,j,k)$, $G_y(i,j,k)$ et $G_z(i,j,k)$: C prend pour valeur 1 pour tout point de contour et 0 sinon ; G_x, G_y, et G_z sont les trois composantes du gradient.

Soit un point de contour M_0 de coordonnées $(x_0, y_0, z_0)^t$ et de vecteur gradient $G_0 = (g_{x_0}, g_{y_0}, g_{z_0})^t$. On considère M_0 et G_0 comme les réalisations de deux variables aléatoires de moyennes la position réelle du point de contour (pour M_0) et le gradient réel (pour G_0). Soient W_{M_0} et W_{G_0} les matrices de covariance associées, si on suppose les trois composantes de M_0 et G_0 non corrélées (ce qui est une hypothèse simplificatrice mais raisonnable), on a dans le repère de l'image :

$$W_{M_0} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix},$$

$$W_{G_0} = \begin{pmatrix} \sigma_{g_x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{g_y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{g_z}^2 \end{pmatrix},$$

où les diagonales des matrices correspondent aux variances des variables aléatoires pour les coordonnées des points et du gradient.
La généralisation du modèle de Canny au cas 3D présentée dans le chapitre 2, section 2.7 permet un calcul théorique de ces incertitudes réalisé dans le cas particulier de l'opérateur Deriche-3D [135]. Le critère de localisation correspond à l'écart type de la distance du point de contour détecté au vrai contour (un plan 3D), soit à l'écart type de la coordonnée parallèle à la normale du contour. En effet pour une détection de contours par filtrage linéaire l'incertitude se situe le long de l'orthogonale au contour . Dans la pratique on rajoute un bruit d'échantillonnage (Δ) pour les autres composantes [132]. Pour M_0 on obtient donc dans un repère orthonormé dont le premier axe est parallèle à la normale au contour, la matrice de covariance suivante :

$$\Sigma_{M_0} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & {\sigma^2}_{\perp} + \Delta \end{pmatrix}.$$

avec

$$\sigma_\perp = \sqrt{\frac{3}{2\alpha}} \frac{\eta_0}{||G_{M_0}||} q(a,b)$$

où

$$q(a,b) = g(a,b)\, h(a,b).$$

$g(a,b)$ et $h(a,b)$ sont des fonctions de l'orientation du contour définies au chapitre 2, section 2.7 pour un cas particulier, α est la largeur de l'opérateur, et η_0 l'écart type du bruit blanc. Pratiquement on pose :

$$(a,b) = (\frac{G_x}{G_z}, \frac{G_y}{G_z})$$

Dans le repère de l'image la matrice de covariance s'écrit :

$$W_{M_0} = R\Sigma_{M_0} R^t,$$

Pour W_{G_0} on obtient dans le repère de l'image :

$$W_{G_0} = \frac{3\alpha\eta_0^2}{2g^2(a,b)} I_3.$$

où I_3 est la matrice identité dans R^3.

11.2.2.2. Modèle local

Soit un ensemble de points P et les gradients G (approximant les normales à la surface).

Soit $M \in P$ un point de la trace de la surface et $\vec{N} \in G$ la normale associée. En utilisant $\vec{N}$ on peut définir un repère lié au plan tangent à M que nous noterons (M,Q,R,N). On notera que la base (M,Q,R) du plan tangent à M est arbitraire (la seule contrainte est que le repère soit direct et orthonormé). Dans la suite, M est un point où le modèle local est ajusté, et les points M_i définissent un voisinage de M avec des normales associées $\vec{N_i}$. On supposera les coordonnées de M_i et $\vec{N_i}$ données dans le repère du plan tangent (le développement est plus simple dans ce repère).

On suppose donc que les données fournies par la détection de contour représentent une estimation bruitée des points et des normales d'une surface S.

On considère la surface comme une variété différentiable de dimension 2 et on construit une paramétrisation locale en tout point. Ainsi, pour un point $M \in P$ on suppose que la paramétrisation locale (ψ, U)

$$\psi : U \subset \mathcal{S} \to I\!R^2$$

(ψ étant un difféomorphisme, $M \in$ ensemble ouvert U) est telle que $\psi(P) = (0,0)$ et que sa réciproque restreinte à $\psi(U)$

$$\phi = i \circ \psi^{-1} : \psi(U) \subset I\!R^2 \to I\!R^3$$

dans $I\!R^3$ (exprimée dans le repère lié au plan tangent à M), est une fonction $h : \psi(U) \to I\!R$ avec

$$\begin{aligned} h(0,0) &= 0, \\ h_q(0,0) = \left.\frac{\partial h}{\partial q}\right|_{(0,0)} &= 0 \\ h_r(0,0) = \left.\frac{\partial h}{\partial r}\right|_{(0,0)} &= 0 \end{aligned}$$

(cela est toujours vrai pour au moins une paramétrisation locale). la fonction $h(q,r)$ définit l'allure de la surface au voisinage du point M et correspond au modèle local. On peut choisir des fonctions différentes pour ce modèle local. On considérera dans la suite le modèle proposé dans [161] (une quadrique parabolique) justifié par les considérations qui suivent. Le développement de Taylor de h au voisinage de l'origine est :

$$h(q,r) = \frac{1}{2}\left(h_{qq}q^2 + 2h_{qr}qr + h_{rr}r^2\right) + R.$$

Si notre objectif est le calcul de propriétés différentielles d'ordre 2 comme les courbures le modèle de paramétrisation locale le plus simple est :

$$h = \frac{1}{2}eq^2 + fqr + \frac{1}{2}gr^2, \qquad [11.1]$$

où

$$e = h_{qq}(0,0), \quad f = h_{qr}(0,0), \quad g = h_{rr}(0,0)$$

(connue comme une quadrique parabolique). Dans ce cas particulier la matrice hessienne de la surface définie par $h(q,r)$ au point M (G_M) correspond à l'endomorphisme de Weingarten soit :

$$G_M = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de G_M sont les courbures principales :

$$K_1 = \frac{(e+g+\sqrt{(e-g)^2+4f^2})}{2}$$
$$K_2 = \frac{(e+g-\sqrt{(e-g)^2+4f^2})}{2}$$

La courbure gaussienne (K : déterminant de G_M) et la courbure moyenne (H : trace de G_M) sont donc :

$$K = eg - f^2$$
$$H = \frac{(e+g)}{2}$$

On calcule ainsi les vecteurs propres associés qui correspondent aux directions principales de courbure [161].

11.2.2.3. Méthode d'ajustement

Une fois qu'on a choisi les données prises en compte et le modèle local, il s'agit d'ajuster ce modèle sur les données.

11.2.2.3.1. Instanciation du modèle

On cherche donc la surface quadrique locale passant par le point M qui approxime le mieux (au sens d'un certain critère) les points voisins : $M_i = (q_i, r_i, n_i)^t$ et leurs normales $\vec{n_i} = (\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i)^t$. On obtient dans le repère lié au plan tangent au point M une première équation de mesure pour chaque point M_i :

$$E_1(e,f,g) = q_i^2 e + 2q_i r_i f + r_i^2 g - 2n_i = 0 \qquad [11.2]$$

Cette équation mesure la différence entre la position de M_i et la quadrique définie par (e, f, g) passant par le point M. On notera qu'on pourrait aussi ne pas contraindre le modèle local à passer par le point M.
La prise en compte (éventuelle) du gradient qui approxime la normale à la surface permet de rajouter des équations de mesure. En effet, dans le repère du plan tangent la normale à la quadrique au point M est :

$$n_i = \begin{pmatrix} -q_i e - r_i f \\ -q_i f - r_i g \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si on note la normale "normalisée" au point M_i par

$$(\alpha_i, \beta_i, 1)^t = (\alpha_i'/\gamma_i', \beta_i'\gamma_i', \gamma_i'/\gamma_i')^t$$

on obtient deux équations de mesure supplémentaires :

$$E_2(e,f,g) = q_i e + r_i f + \alpha_i = 0, \qquad [11.3]$$

$$E_3(e,f,g) = q_i f + r_i g + \beta_i = 0. \qquad [11.4]$$

Les équations $[E_1\text{–}E_3]$ sont les trois équations de mesure qui contraignent la détermination des paramètres e, f, g de la quadrique au point P. Ces équations sont comparables aux quatre équations de [163]. La seule restriction de ces équations est que l'on suppose que les normales N_i des points M_i, mesurées dans le repère lié au plan tangent, ont une troisième composante non nulle (ce qui est raisonnable si on suppose les M_i dans le voisinage de M). Si on note :

$$A_i = \begin{pmatrix} q_i^2 & 2q_i r_i & r_i^2 \\ q_i & r_i & 0 \\ 0 & q_i & r_i \end{pmatrix}, \qquad b_i = \begin{pmatrix} 2n_i \\ -\alpha_i \\ -\beta_i \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix},$$

Les équations de mesure [11.3] et [11.4] en M peuvent être mises sous forme matricielle :

$$A_i x = b_i.$$

11.2.2.3.2. Solution classique au sens des moindres carrés

De manière à traiter le cas le plus général on va supposer que l'on pondère les équations de mesure avec les incertitudes des mesures (les coordonnées des points M_i et les gradients $\vec{G_i} = \vec{N_i}$). Dans le cas contraire on pose les matrices W_i, définies ci dessous, comme égale à l'identité. On détermine ainsi une matrice W_i qui est la covariance de $A_i x - b_i$. L'introduction de cette matrice permet de pondérer les équations du moindre carré en fonction de la confiance qu'on leur accorde (fonction des incertitudes de leurs termes).

$$W_i = E\left[(A_i x - b_i)(A_i x - b_i)^t\right].$$

Ainsi, une solution au sens des moindres carrés pondérée par les matrices de covariance minimise :

$$C = \sum_i (A_i x - b_i)^t W_i^{-1} (A_i x - b_i),$$

et est donnée par :

$$x = \left(A^t W^{-1} A\right)^{-1} A^t W^{-1} b,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \quad W = \begin{pmatrix} W_1 & & \\ & \ddots & \\ & & W_n \end{pmatrix}.$$

11.2.2.3.3. Solution récursive

On peut implanter une solution récursive à ce type de problème de minimisation connue sous le nom de *filtre de Kalman* [116, 9]. Par cette méthode, chaque fois qu'une nouvelle mesure M_i est donnée, il est seulement nécessaire de calculer A_i et b_i *pour ce point* et de mettre à jour la solution courante (x_i, S_i) en utilisant les équations récursives :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_i & = & x_{i-1} + K_i(b_i - A_i x_{i-1}), \\ K_i & = & S_{i-1} A_i^t (W_i + A_i S_{i-1} A_i^t)^{-1}, \\ S_i & = & (I - K_i A_i) S_{i-1}. \end{array} \right.$$

S_i est la matrice de covariance de l'estimée courante des paramètres :

$$S_i = E\left[(x_i - x)(x_i - x)^t\right]$$

exprimant l'adéquation de l'estimée courante x_i et de la valeur idéale $\mathbf{x}$ du vecteur paramètre. C'est une mesure de la qualité de l'estimation : une petite covariance signifie que l'estimée calculée x_i est proche des véritables paramètres $\mathbf{x}$. Il est nécessaire d'initialiser le filtre avec (x_0, S_0), qui peut prendre les valeurs $x_0 = 0, S_0 = \infty$ si aucune information *a priori* n'est disponible pour aucun des paramètres.

11.2.2.3.4. Détails pratiques

Par simplicité le développement précédent a été présenté en considérant des coordonnées exprimées dans le repère du plan tangent. Nous montrons maintenant comment transformer les coordonnées réelles des points M_i et des vecteurs normaux N_i ainsi que les matrices de covariance correspondantes W_{M_i} et W_{N_i}, du repère de l'image, en des variables $v = (q_i, r_i, n_i, \alpha_i, \beta_i)^t$ et des matrices de covariance W_i dans le repère lié au plan tangent à P. Ainsi on peut appliquer le développement précédent directement aux données de l'image.
Supposons que $M_i = (x_i, y_i, z_i)^t$ et $n_i = (n_{x_i}, n_{y_i}, n_{z_i})^t$ soient données dans un système de coordonnées lié à l'image (X, Y, Z). Pour les exprimer dans le repère du plan tangent lié à $M = (x, y, z)^t$ (Q, R, N) on calcule :

$$\begin{pmatrix} q_i \\ r_i \\ n_i \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_i - x \\ y_i - y \\ z_i - z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha'_i \\ \beta'_i \\ \gamma'_i \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} n_{x_i} \\ n_{y_i} \\ n_{z_i} \end{pmatrix},$$

et

$$\alpha_i = \frac{\alpha'_i}{\gamma'_i}, \qquad \beta_i = \frac{\beta'_i}{\gamma'_i},$$

pour

$$R = \begin{pmatrix} Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \\ N_x & N_y & N_z \end{pmatrix}.$$

où les coordonnées des vecteurs du repère lié au plan tangent en M sont dans le repère global (lié à l'image) (X, Y, Z) :

$$P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix}.$$

On suppose que les matrices de covariance du point M_i et de la normale associée N_i soient données dans le *repère global* (X, Y, Z) respectivement par W'_{Q_i} et W'_{n_i}. Pour une transformation affine quelconque d'une variable aléatoire $v_i \to w_i = M\,(v_i - v)$ on a :

$$E\left[(w_i - w)(w_i - w)^t\right] = M\,E\left[(v_i - v)(v_i - v)^t\right]\,M^t,$$

Les matrices de covariance exprimées dans le repère lié au plan tangent à M (M, Q, R, N) sont

$$W_{Q_i} = R W'_{Q_i} R^t, \qquad W_{n_i} = R W'_{n_i} R^t,$$

qui sont des matrices 3×3.

En fait si on exprime $N_i = (\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i)^t$ dans le repère lié au plan tangent, on doit calculer $\alpha_i = \alpha'_i / \gamma'_i$ and $\beta_i = \beta'_i / \gamma'_i$. De manière à obtenir une approximation du premier ordre on calcule la matrice 2×2 $\widetilde{W}_{n_i}$:

$$\widetilde{W}_{n_i} = J_1 W_{n_i} J_1^t$$

où J_1 est la matrice jacobienne du changement de variables :

$$J_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma'_i} & 0 & \frac{-\alpha'_i}{\gamma_i'^2} \\ 0 & \frac{1}{\gamma'_i} & \frac{-\beta'_i}{\gamma_i'^2} \end{pmatrix}$$

Ainsi la matrice 5×5

$$W_{M,n} = \begin{pmatrix} W_M & 0_{3\times 2} \\ 0_{2\times 3} & \widetilde{W}_{n_i} \end{pmatrix}$$

est la covariance du vecteur de mesure $(q_i, r_i, n_i, \alpha_i, \beta_i)$.

On détermine une approximation du premier ordre de la matrice 3×3 W_i :

$$W_i = J_2 W_{M,n_i} J_2^t,$$

où J_2 est la matrice jacobienne :

$$J_2 = \begin{pmatrix} 2q_i e + 2r_i f & 2q_i f + 2r_i g & -2 & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 1 & 0 \\ 0 & f & g & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de covariance 2×2 des courbures est déterminée de manière similaire :

$$W_c = J_3 W_{M_i} J_3^t,$$

avec la jacobienne :

$$J_3 = \begin{pmatrix} g & -2f & e \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

11.2.2.4. Voisinage pris en compte

La détermination du voisinage pris en compte pour ajuster le modèle local conditionne les résultats de ce type d'algorithme. Dans le développement précédent ce voisinage est défini implicitement par les points M_i.

Une première étape, commune à la plupart des méthodes, consiste à construire le graphe d'adjacence des points de contour. Ce graphe définit les relations de connexité entre les points de la trace de la surface. Si les données sont suffisamment denses, la 26-connexité (chaque voxel est voisin avec les voxels ayant une face, une arête ou un point en commun) suffit pour construire ce graphe. Si les données ne sont pas suffisamment denses, des méthodes de géométrie algorithmique basées sur la triangulation de Delaunay permettent de définir des relations d'adjacence [20, 19].

Une deuxième étape consiste à définir le voisinage pris en compte pour l'approximation locale en chaque point. Ce voisinage est une composante connexe du graphe d'adjacence contenant le point. A cet effet plusieurs méthodes peuvent être utilisées :

1. L'algorithme le plus élémentaire consiste à déterminer l'intersection d'une sphère dont le centre sera le point considéré (M) et de rayon r (r est fixé et définira l'amplitude du voisinage) avec l'ensemble des points de contour. On sélectionne ensuite les points appartenant à la composante connexe du point M. L'inconvénient de cet algorithme est qu'il revient à regarder la surface avec une même résolution en tous les points.

2. On peut améliorer la méthode précédente en rajoutant des critères de sélection des points (dans ce cas la valeur du paramètre r peut être plus importante) :

(a) Seuls les points dont la normale (gradient 3D issu de la détection de contour) a une orientation proche de la normale au point considéré (M) sont sélectionnés. Dans les expérimentations décrites dans [132] l'angle maximum entre les normales est fixé à $\frac{\pi}{4}$.

(b) Si on utilise une méthode récursive de prise en compte des points voisins, l'accroissement de l'erreur d'approximation peut être aussi un critère de sélection. L'inconvénient de ce schéma est que le résultat dépend alors de l'ordre de prise en compte des points. On peut amoindrir ce problème en ordonnant les points en fonction de leur proximité du point central (M).

(c) Une autre méthode introduite dans [161] consiste à calculer le conditionnement de la matrice des moindres carrés normalisée (rapport entre les deux valeurs propres extrémales). Ce conditionnement caractérise la stabilité de la solution aux petites perturbations des données. On peut ainsi augmenter la taille du voisinage jusqu'à ce que le conditionnement ne prenne une valeur trop importante.

11.2.2.5. Amélioration de la continuité des champs de courbure

Les algorithmes décrits précédemment fournissent les courbures et les directions principales de courbure en tout point de la trace (point de contour 3D) par approximation locale. Lorsque les données sont trop bruitées, on peut obtenir des courbures et des directions principales de courbure manquant de continuité. Pour remédier à ce problème on met en œuvre des méthode itératives permettant d'améliorer la cohérence des champs de valeurs obtenues. Un exemple de ce type d'approche est décrit dans [161]. Nous en décrivons les points essentiels : Soit un point M et ses voisins M_i.
On peut associer à M le repère de Darboux $(M, \vec{X_1}, \vec{X_2}, \vec{N})$ défini comme suit :

- $\vec{X}1$ est un vecteur normé de même direction que la direction principale de courbure associée à la courbure de module maximum.

- $\vec{X_2}$ est un vecteur normé de même direction que la direction principale de courbure de module minimum.

- $\vec{N_i}$ est un vecteur normé de même direction que la normale à la surface.

- $(M, \vec{X_1}, \vec{X_2}, \vec{N_i})$ forme un repère orthonormé direct de l'espace.

Soit $(M_i, \vec{X_{1_i}}, \vec{X_{2_i}}, \vec{N_i})$ le repère de Darboux associé à un point voisin M_i. Si on suppose la surface relativement lisse les repères de Darboux associés à chaque point doivent varier de façon continue. De manière à améliorer cette continuité, on peut modifier de manière itérative le repère de Darboux $(M, \vec{X_1}, \vec{X_2}, \vec{N})$ en minimisant :

$$E^2 = \sum_{i=1}^{n}((\vec{X_1} - \vec{X_{1_i}})^2 + (\vec{N} - \vec{N_i})^2)$$

où le carré dénote le produit scalaire avec la contrainte d'orthogonalité :

$$F = < \vec{X_1}, \vec{N} > = 0$$

En utilisant le multiplicateur de Lagrange λ la minimisation sous contrainte précédente peut s'écrire comme la minimisation non linéaire de :

$$J = E^2 + \lambda F$$

Les détails de la solution se trouvent dans [161]. L'algorithme consiste donc à remplacer chaque repère de Darboux associé à un point par un nouveau repère obtenu par minimisation d'une contrainte non linéaire exprimant la continuité des repères dans l'espace.
Ce type de méthode permet d'éliminer des erreurs lorsque le bruit perturbe trop l'étape d'approximation locale. Néanmoins ce type d'algorithme doit être utilisé avec précaution car :

- la non-linéarité du critère de continuité peut induire des temps de calcul importants,
- bien que les directions maximums de courbure et les normales obtenues finalement soient davantage continues, leur adéquation avec les données réelles dépend du bien-fondé du critère (E) pour chaque cas particulier.

11.2.2.6. Des courbures aux attributs caractéristiques des surfaces

Les algorithmes précédents déterminent pour chaque point de la trace de la surface (point de contour 3D) les courbures moyennes et gaussiennes ainsi que les directions principales de courbure. L'étape suivante consiste à utiliser ces courbures pour extraire des lignes ou des points caractéristiques tracés sur ces surfaces. On détaillera plus spécialement dans cette partie le cas des lignes de crête utilisées avec succès pour la fusion de données [77].

11.2.2.6.1. Cartes locales de courbure

Un moyen pratique de caractériser le comportement de la courbure au voisinage d'un point est de définir des cartes locales de courbure. Soit un point M et son plan tangent défini par (M, Q, R), soit V l'intersection d'une sphère de centre M et de rayon r avec les points de contour (ceci définit un voisinage de M), et soit W la projection orthogonale des points de V sur le plan tangent. A tout point de W nous associons les courbures des points correspondants de V. La taille de V peut être déterminée en utilisant la distance entre les points et le plan tangent et l'angle entre le gradient en un point et le gradient en M. On définit ainsi une carte locale caractérisant le comportement des courbures au voisinage de P.

11.2.2.6.2. Extraction de lignes de crête

A partir des cartes locales de courbure, on peut extraire, par exemple, les maximums de la courbure maximum dans la direction maximum de courbure. Pour cela, on peut utiliser des principes similaires à ceux de l'extraction des maxima locaux de la norme du gradient pour la détection de contours (voir chapitre 2, section 2.4).

Soit $C(M)$ la carte locale des courbures maximums du point M et $G(M)$ la projection de la direction maximum de courbure sur le plan tangent. On compare les valeurs de la courbure maximum le long de la droite définie par M et $G(M)$ de part et d'autre de M. On retient M si sa courbure maximum est localement extremum le long de cette direction.

Ainsi, on obtient des points susceptibles d'être des extremums de courbure. Pour éliminer les faux extremums, on peut réaliser un seuillage par hystéresis 3D en utilisant la courbure maximum. La méthode est similaire au seuillage des extremums locaux du gradient en utilisant la norme du gradient décrite au chapitre 2, section 2.2.3. Les figures 11.7. et 11.8. présentent un exemple d'extraction de lignes de crête fournie par cette méthode. Les courbures ont été déterminées avec l'algorithme d'approximation locale décrit dans [132].

11.2.3. Des dérivées partielles aux courbures

Dans l'hypothèse, réaliste dans la plupart des cas, où le gradient en un point de contour correspond à la normale à la surface, il semble naturel de pouvoir exprimer les courbures en fonction des dérivées secondes de l'image. En effet les courbures sont définies par les variations locales de l'orientation de la normale. Les normales correspondant aux vecteurs gradient, leurs variations s'expriment donc en fonction des dérivées du gradient soit des dérivées partielles secondes de l'image. Nous décrirons deux méthodes illustrant cette remarque : un algorithme de calcul direct utilisant l'hypothèse que le gradient définit un champ différentiable sur toute l'image, une autre approche considérant l'image comme une hypersurface dans R^4.

Figure 11.7. *Vues en perspective des contours 3D sur lesquelles on a tracé en noir les lignes de crête, l'image originale est une image RMN 3D d'un visage.*

Figure 11.8. *Projection des lignes de crête de la figure précédente.*

11.2.3.1. Relations entre les dérivées des images et les courbures des contours : application au calcul des courbures et à la caractérisation des points de crête à partir des dérivées partielles

On a vu au chapitre "détection de contours" que pour un modèle d'iso-contour (i.e. le contour sépare localement deux zones de niveaux de gris constants) le gradient correspond à la normale au contour. Dans le cas 3D le gradient est parallèle à la normale à la surface. Intuitivement, cela signifie que les propriétés différentielles des contours des objets (2D ou 3D) représentés par les images s'expriment en fonction des dérivées partielles des images. Nous présentons les calculs correspondant au cas 2D puis au cas 3D et nous montrons comment les appliquer à l'extraction des points de crête.

11.2.3.1.1. Cas 2D

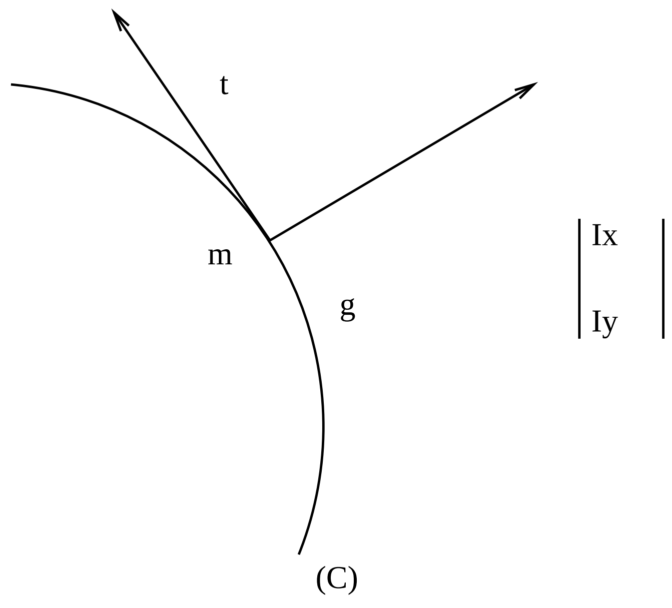


Figure 11.9. *Gradient et normale : cas 2D.*

Soit (C) un contour dans une image $I(x, y, z)$. On suppose que I est différentiable et que (C) est un iso-contour (i.e. le gradient est parallèle à la normale).

On note $\vec{g}$ le gradient de I supposé normal à la courbe (C) (voir figure 11.9.). On veut calculer la courbure k de (C) au point m.

Soit $\vec{t}$ le vecteur tangent unitaire à la courbe (C) au point m

$$\vec{g} \cdot \vec{t} = 0$$

Soit s une abscisse curviligne le long de C, nous avons :

$$\frac{d(\vec{g} \cdot \vec{t})}{ds} = \frac{d\vec{g}}{ds} \cdot \vec{t} + \vec{g} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0 \qquad [11.5]$$

La courbure k est défini comme suit :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\,\vec{n} = k\frac{\vec{g}}{||\vec{g}||} \qquad [11.6]$$

où $\vec{n}$ est un vecteur normal unitaire (égal à $\frac{\vec{g}}{||\vec{g}||}$). *On notera que l'équation précédente revient à signer la courbure selon l'orientation de $\vec{g}$.*

Le problème est donc de dériver le vecteur tangent (orthogonal au gradient) par rapport à une abscisse curviligne de C. Or on ne connaît pas d'abscisse curviligne. Par contre on connaît les variations du gradient (orthogonal au vecteur tangent) dans les deux directions définies par le repère de l'image OXY. On suppose que le gradient définit sur toute l'image une forme différentielle et correspond à la normale à (C) en tous les points de (C). Le gradient étant calculé sur toute l'image par filtrage linéaire cette hypothèse est raisonnable (voir chapitre 2, section 2.2.3). Ainsi l'application de la règle de composition des applications et le fait que la tangente est par définition $\vec{t} = (\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})^t$ permet d'exprimer les variations du gradient en fonction de s sans utiliser explicitement l'abscisse curviligne. On obtient :

$$\frac{d\vec{g}}{ds} = \frac{\partial\vec{g}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\vec{g}}{\partial y}\frac{dy}{ds} = H\vec{t} \qquad [11.7]$$

où H est le hessien de la fonction des niveaux de gris $I(x, y)$:

$$H = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix}$$

En combinant les équations [11.5], [11.6] et [11.7] on obtient

$$k = \frac{-t^T H t}{||\vec{g}||}$$

Le vecteur tangent $\vec{t}$ s'exprime simplement comme :

$$||\vec{g}||\vec{t} = \begin{pmatrix} -I_y \\ I_x \end{pmatrix}$$

Pour caractériser les points où la courbure est localement extremum (points de crête pour les maxima et points de vallée pour les minima (voir figure 11.10.) on annule la dérivée de la courbure par rapport à l'abscisse curviligne. :

$$k(s) \;=\; \frac{-t^T Ht}{||\vec{g}||} \text{ avec } ||\vec{g}||\vec{t} \;=\; \begin{pmatrix} -I_y \\ I_x \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t} \;=\; \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$$

Les extremums de courbure sont localisés où la dérivée $k'(s)$ est nulle i.e. :

$$\frac{\frac{d(t^T Ht)}{ds}\; ||\vec{g}|| \;-\; (t^T Ht)\; \frac{d||\vec{g}||}{ds}}{||\vec{g}||^2} \;=\; 0$$

comme :

$$\frac{d||\vec{g}||}{ds} \;=\; \frac{g^T Ht}{||\vec{g}||}$$

$$\frac{d(t^T Ht)}{ds} \;=\; \frac{dt^T}{ds} Ht \;+\; t^T \frac{d(Ht)}{ds}$$

$$\frac{d(Ht)}{ds} = \begin{pmatrix} t^T H_x t \\ t^T H_y t \end{pmatrix} \;+\; H\frac{dt}{ds}$$

avec :

$$H_x = \begin{pmatrix} I_{xxx} & I_{xyx} \\ I_{yxx} & I_{yyx} \end{pmatrix} \;,\; H_y = \begin{pmatrix} I_{xxy} & I_{xyy} \\ I_{yxy} & I_{yyy} \end{pmatrix}$$

On obtient finalement l'équation des extremums de courbure :

$$\frac{3\;(t^T Ht)(g^T Ht) \;-\; ||\vec{g}||^2\; t^T \begin{pmatrix} t^T H_x t \\ t^T H_y t \end{pmatrix}}{||\vec{g}||^3} \;=\; 0$$

La figure 11.10. présente un exemple de résultat obtenu sur une image synthétique. Les dérivées partielles de l'image ont été calculées avec les filtres récursifs décrits dans la section 11.2.3.3.

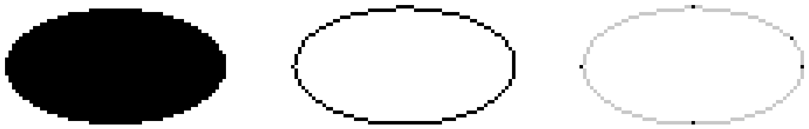


Figure 11.10. *Résultats sur une ellipse synthétique 2D : A gauche l'image originale de l'ellipse, au milieu les contours extraits et à droite les extremums de courbure. Les deux faux extremums peuvent être supprimés par un simple seuillage utilisant la courbure maximum.*

11.2.3.1.2. Cas 3D

On considère une surface $\sum$ définie comme une iso-surface de $I(x, y, z)$.

Soit $\vec{t}$ un vecteur unitaire du plan tangent T_m en un point m et $\vec{g}$ la normale à la surface au point m (voir figure 11.11.).

On veut calculer la courbure de $\sum$ dans la direction $\vec{t}$, que nous noterons $k_{\vec{t}}$. Par définition [49, 103] la courbure d'une surface en un point dans une direction donnée est la courbure d'une courbe tracée sur la surface dont la normale principale est la normale à la surface en tous ses points et dont la tangente au point considéré est la direction choisie (on montre que le résultat est unique quelle que soit la courbe considérée [49]).

En utilisant le fait que $\vec{g} \cdot \vec{t} = 0$ sur $\sum$, et en considérant la dérivée directionnelle selon la direction définie par $\vec{t}$, on obtient comme dans le cas 2D :

$$L_{\vec{t}}(\vec{g} \cdot \vec{t}) = t^T H t + k_{\vec{t}} \vec{g} \cdot \vec{n}$$

où $L_{\vec{t}}$ est l'opérateur de dérivation de Lie et H le Hessien de la fonction des niveaux de gris $I(x, y, z)$:

$$H = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Comme :

$$\vec{n} = \frac{\vec{g}}{||\vec{g}||}$$

en utilisant :

$$\frac{d\vec{g}}{ds} = H\vec{t} \qquad [11.8]$$

et

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k_{\vec{t}}\,\vec{n} = k_{\vec{t}}\frac{\vec{g}}{||\vec{g}||} \qquad [11.9]$$

il vient :

$$k_{\vec{t}} = -\frac{t^T Ht}{||\vec{g}||}$$

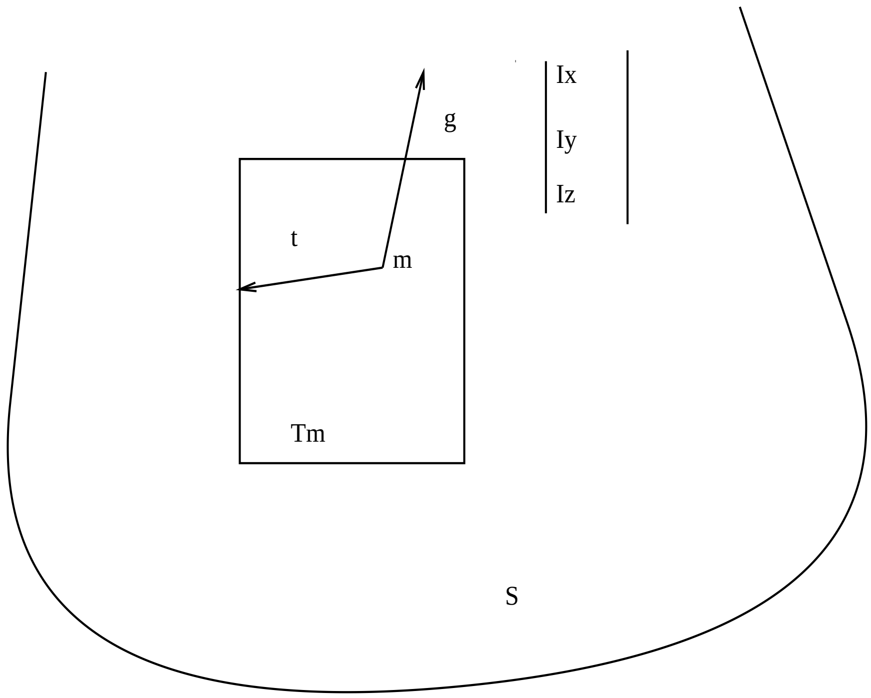


Figure 11.11. *Contour 3D, gradient et normale.*

Les courbures principales et les directions principales de courbure peuvent être obtenues en recherchant les directions $\vec{t}$ pour lesquelles $k_{\vec{t}}$ est un extremum. On peut utiliser le calcul suivant :

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix}$$

Soit $(\vec{a},\vec{b})$ une base orthonormée du plan tangent :

$$||\vec{a}|| = ||\vec{b}|| = 1$$
$$\vec{a} \cdot \vec{g} = \vec{b} \cdot \vec{g} = 0;$$
$$\vec{t} = \cos\theta\ \vec{a} + \sin\theta\ \vec{b}$$

Si on dérive $k_{\vec{t}}$ par rapport à θ il vient :

$$-||\vec{g}||\frac{dk_{\vec{t}}}{d\theta} = \frac{d(t^T H t)}{d\theta} = \sin 2\theta(\vec{b}^T H \vec{b} - \vec{a}^T H \vec{a}) + 2\cos 2\theta \vec{a}^T H \vec{b}$$

Ainsi, si θ est une direction principale de courbure, cette dérivée s'annule, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{dk_{\vec{t}}}{d\theta} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \tan 2\theta = \frac{2\vec{a}^T H \vec{b}}{\vec{a}^T H \vec{a} - \vec{b}^T H \vec{b}} = E \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\theta = \theta_1 = \frac{\arctan E}{2}\right) \vee \left(\theta = \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

On notera que la première équivalence implique que le dénominateur soit non nul. En fait le dénominateur s'annule si et seulement si le point est un ombilic [49]. Les deux directions principales de courbure $\vec{t}_1$ et $\vec{t}_2$ sont :

$$\vec{t}_1 = \cos\theta_1\ \vec{a} + \sin\theta_1\ \vec{b}$$
$$\vec{t}_2 = \cos\theta_2\ \vec{a} + \sin\theta_2\ \vec{b}$$

Les deux courbures principales sont :

$$K_1 = k_{\vec{t}_1} = \frac{t_1^T H t_1}{||\vec{g}||}$$
$$K_2 = k_{\vec{t}_2} = \frac{t_2^T H t_2}{||\vec{g}||}$$

Dans la suite nous supposerons que $| k_{\vec{t}_1} | > | k_{\vec{t}_2} |$ i.e. $\vec{t}_1$ est la direction maximum de courbure et $k_{\vec{t}_1}$ la courbure maximum.

De manière à éviter le calcul de l'arc-tangente la méthode suivante peut aussi être utilisée pour déterminer les courbures principales et les directions principales de courbure :

Les courbures principales sont la solution du problème d'optimisation sous contrainte suivant :

$$Min < H\, d\, ,\, d >$$
$$s.c. \begin{cases} < d\, ,\, d > = 1 \\ < d\, ,\, g > = 0 \end{cases}$$

On définit une matrice de rotation P de manière à obtenir un nouveau repère dont le premier vecteur est parallèle à $\vec{g}$:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{I_x}{\delta} & \frac{I_y}{\gamma} & \frac{I_z\, I_x}{\gamma\delta} \\ \frac{I_y}{\delta} & \frac{-\, I_x}{\gamma} & \frac{I_y\, I_z}{\gamma\delta} \\ \frac{I_z}{\delta} & 0 & -\, \frac{\gamma}{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g} & \vec{h} & \vec{f} \end{pmatrix}$$

avec

$$\gamma = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} \text{ and } \delta = \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + I_z^2}$$

Après le changement de variables $P\, w\; =\; d$ le problème de minimisation précédent devient :

$$Min < H\, P\, w\, ,\, P\, w >$$
$$s.c. \begin{cases} < w\, ,\, w > = 1 \\ w_1 \;=\; 0 \end{cases}$$

avec

$$w = (w_1, w_2, w_3)^T$$

En introduisant les notations suivantes :

$$H' = P^T \; H \; P = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \;\; \cdot \\ \cdot & \\ \cdot & H'_e \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} \cdot \\ w_e \end{pmatrix}$$

On obtient le problème équivalent :

$$Min \; < H'_e \, w_e \; , \; w_e >$$

$$s.c. \; < w_e \; , \; w_e > = 1$$

En utilisant *la technique des multiplicateurs de Lagrange*, on réduit ce problème à la diagonalisation d'une matrice H'_e. Les valeurs propres de la matrice H'_e correspondent aux courbures principales. Les directions principales de courbure sont obtenues en appliquant la matrice P aux vecteurs propres de H'_e. Cette méthode permet d'exprimer les courbures principales K_i et les directions principales de courbure (d_i) en utilisant seulement les dérivées premières et secondes des images :

$$K_i = \frac{h^T H h + f^T H f \; \pm \; \sqrt{(h^T H h - f^T H f)^2 \; + \; 4 \; (h^T H f)^2}}{2}$$

$$d_i = \begin{pmatrix} h_1 & + & f_1 \frac{K_i - h^T H h}{f^T H h} \\ h_2 & + & f_2 \frac{K_i - h^T H h}{f^T H h} \\ h_3 & + & f_3 \frac{K_i - h^T H h}{f^T H h} \end{pmatrix} \quad \text{avec } i = 1, 2$$

Les figures 11.12. à 11.15. présentent des exemples de résultats obtenus en appliquant ces formules. Les dérivées partielles de l'image sont obtenues avec les filtres récursifs décrits dans la section 11.2.3.

Figure 11.12. *Extremums de courbure obtenus par simple seuillage du critère d'extrémalité sur une image synthétique d'un ellipsoïde. On obtient à la fois les extremums maximums de courbure (points de crête) mais aussi les extremums minimums de courbure (points de creux) qui sont cependant plus instables.*

Pour la caractérisation des points de crête, le cas 3D n'est pas exactement l'extension du cas 2D car il existe une courbure pour chaque direction, i.e. pour chaque courbe de la surface incluant un point donné m, et telle que la normale à la courbe correspond à la normale à la surface. Un extremum local de courbure est alors un extremum local de la courbure maximum dans la direction maximum de courbure. Il est important de remarquer que cette définition est légale à cause de la continuité et de la différentiabilité du champ des courbures principales sur une surface régulière (voir [49] page 156). Ainsi

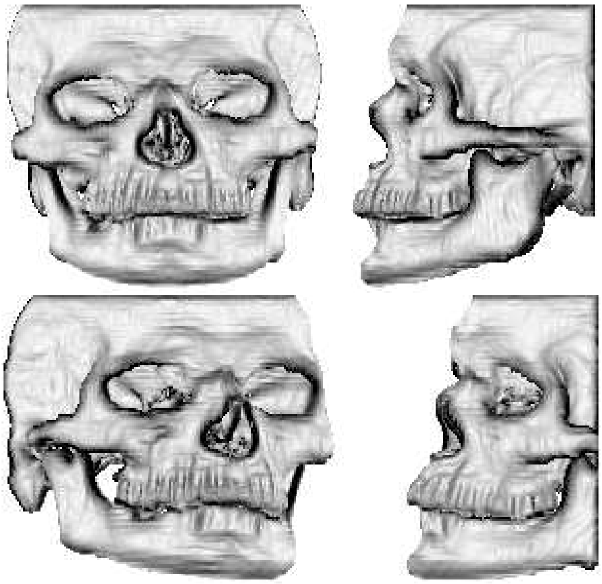


Figure 11.13. *Vues en perspective des courbures maximums pour les deux positions, aucun rendu n'est réalisé : seul l'amplitude de la courbure maximum est affichée (en haut à gauche : vue de face pour la position A , en haut à droite : vue de profil pour la position A, en bas à gauche : vue de face pour la position B, en bas à doite : vue de profil pour la position B).*

Figure 11.14. *Images obtenues par seuillage de la courbure maximum. En haut : vue de face pour la position A (les points de courbure maximum élevée sont en noir) ; en bas : vue de face pour la position B.*

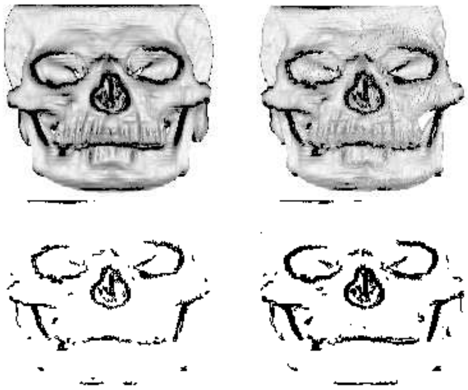


Figure 11.15. *En haut à gauche : seuillage des courbures maximums pour la position A, en haut à droite : même chose pour la position B après l'application de la transformation rigide (rotation et translation) de B vers A, en bas à gauche même chose qu'en haut à droite mais en ne visualisant que les points de forte courbure maximum, en bas à droite : superposition des deux résultats.*

on calcule la dérivée de la courbure $k_{\vec{d}}$ dans la direction $\vec{d}$, les extremums locaux sont les points annulant cette dérivée dans la direction maximum de courbure. On notera que l'on peut aussi définir un point de crête comme un extremum de la courbure principale le long d'une ligne de courbure ce qui est très similaire [181].

Soit $\vec{t_1}$ la direction maximum de courbure, la dérivée de la courbure dans la direction $\vec{t_1}$ est :

$$\nabla_{\vec{t}_1} k_{\vec{t}_1}(m) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{k_{\vec{t}_1}(m + \lambda \vec{t}_1) - k_{\vec{t}_1}(m)}{\lambda} =$$

$$\nabla k_{\vec{t_1}}(m) \cdot \vec{t_1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial k_{\vec{t_1}}}{\partial x}(m) \\ \\ \dfrac{\partial k_{\vec{t_1}}}{\partial y}(m) \\ \\ \dfrac{\partial k_{\vec{t_1}}}{\partial z}(m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{1x} \\ t_{1y} \\ t_{1z} \end{bmatrix}$$

Nous avons :

$$k_{t_1}(m) = \frac{I_{xx}t_{1x}^2 + I_{yy}t_{1y}^2 + I_{zz}t_{1z}^2 + 2I_{xy}t_{1x}t_{1y} + 2I_{xz}t_{1x}t_{1z} + 2I_{yz}t_{1y}t_{1z}}{||\vec{g}||^2}$$

Il vient :

$$\nabla_{\vec{t_1}} k_{t_1}(m) = \frac{||\vec{g}||^2 t_1^T \cdot \begin{bmatrix} t_1^T H_x t_1 \\ t_1^T H_y t_1 \\ t_1^T H_z t_1 \end{bmatrix} - \left(t_1^T H t_1\right)(t_1^T H g)}{||\vec{g}||^3}$$

H étant le hessien de I et H_x, H_y, H_z ses dérivées partielles.

$$H = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$H_x = \frac{\partial H}{\partial x} = \begin{bmatrix} I_{xxx} & I_{xyx} & I_{xzx} \\ I_{yxx} & I_{yyx} & I_{yzx} \\ I_{zxx} & I_{zyx} & I_{zzx} \end{bmatrix}$$

L'expression $\nabla_{\vec{t_1}} k_{\vec{t_1}}(m)$ est appelée critère d'extrémalité. Il est important de remarquer que ce critère d'extrêmalité est un "invariant euclidien **au signe près**" car le sens des directions pricipales de courbures n'est pas défini. Par contre les passages par zéro de ce critère sont invariants par transformation rigide. Cette remarque a des conséquences lorsque l'on veut déterminer les zéros du critère en détectant ses changements de signe. En effet, même si dans la pratique on peut définir une cohérence du sens des directions maximums de courbure, il subsiste des changements de signe du critère "normalisé" ne correspondant pas à un passage par zéro. Une manière de tourner cette difficulté est de calculer non pas simplement la dérivée de la courbure maximum le long de la direction maximum de courbure mais *le produit des dérivées des deux courbures principales le long des directions principales correspondantes.* Moyennant quelques précautions pour définir le sens des directions principales de courbures on définit ainsi un invariant euclidien introduit par JP. Thirion et appellé "extrêmalité gaussienne" [169]. Il est évident que les zéros du critère d'extrêmalité sont aussi des zéros de l'extrêmalité gaussienne. Cependant, en général, l'interprétation géométrique des passages par zéro de l'extrêmalité gaussienne ("maillage extrêma [169]) est difficile.

La figure 11.16. illustre le critère d'extrêmalité sur une image 3D (scanner X) d'un crâne .

Figure 11.16. *Vue en perspective pour la position A des points où le critère d'extrémalité est faible.*

11.2.3.2. Géométrie différentielle dans R^4 et images 3D

De même qu'une image bidimensionnelle $I(x, y)$ définit une surface dans R^3 [140] de trace $(x, y, I(x, y))$, une image 3D définit une hypersurface dans R^4 de trace $(x, y, z, I(x, yz))$ [133]. Les notions de base de géométrie différentielle dans R^3 (première et deuxième formes fondamentales, endomorphisme de Weingarten, courbures et directions principales...) se généralisent, quasiment directement à R^4 (et d'ailleurs à R^n). Une idée naturelle est de s'intéresser aux caractéristiques différentielles de l'hypersurface [105] définie par l'image. Intuitivement, ces caractéristiques différentielles dépendent à la fois de la géométrie des surfaces et de la fonction des niveaux de gris. Un avantage de cette approche est qu'elle s'applique même dans le cas où les surfaces ne correspondent pas localement à des isocontours. Une difficulté est de déterminer parmi les 3 courbures 4D, celles caractérisant les surfaces et celles associées à la fonction des niveaux de gris. On verra que pour un modèle réaliste, en un point de contour, les deux courbures les plus fortes correspondent aux courbures de la surface, et la courbure la plus faible à la fonction des niveaux de gris.

11.2.3.2.1. Courbures d'une image 3D

Soit E l'espace affine euclidien orienté de dimension 4 et V l'espace vectoriel associé.

Définition 1 (*hypersurface paramétrée*) *Une hypersurface paramétrée de E est un couple (Σ, M) où Σ est un sous-ensemble de E et M une application continue d'un ouvert U de R^3 vers E dont l'image $M(U)$ est égale à Σ; M est appelée représentation paramétrique de l'hypersurface Σ.*

Si M est C^k l'hypersurface Σ est dite C^k.

Application aux images 3D :

Soit I(x,y,z) la fonction des niveaux de gris d'une image 3D et soit :

$$\Sigma = \left\{\vec{v} \in R^4 / \vec{v} = (x, y, z, I(x, y, z))\right\}$$

$$M : R^3 \longrightarrow E$$

donné par

$$(x, y, z) \longrightarrow (x, y, z, I(x, y, z))$$

Ainsi on peut considérer une image 3D comme une hypersurface dans R^4

Définition 2 (*hyperplan tangent*) *Soit (Σ, M) une hypersurface paramétrée de classe C^k $(k \geq 1)$. Si $M_0 = M(u_0, v_0, w_0)$ est tel que les vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial w}$ calculés au point M_0 sont linéairement indépendants, alors l'hypersurface (Σ, M) admet un hyperplan tangent au point M_0 et l'hyperplan tangent Σ en M_0 est donné par :*

$$T_{M_0}\Sigma = R\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \oplus R\frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \oplus R\frac{\partial \vec{M}}{\partial w}$$

La normale à l'hypersurface en M_0 est donnée par :

$$\vec{K_0} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial w}$$

Application aux images 3D :

Soit $\vec{G} = (I_x, I_y, I_z)^t$ le gradient en un point $P_0(x_0, y_0, z_0)$; (ici nous utilisons les indices pour noter les dérivées partielles). Le point $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ dans R^3 correspond au point $\vec{M}(x_0, y_0, z_0) = M_0 : (x_0, y_0, z_0, I(x_0, y_0, z_0))$ dans R^4 ainsi :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} = (1, 0, 0,\ I_x)^t$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = (0, 1, 0\ I_y)^t$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial w} = (0, 0, 1,\ I_z)^t$$

La normale à l'hypersurface au point M_0 est :

$$\vec{K_0} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial w}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}}(I_x, I_y, I_z, -1)^t$$

avec :

$$D = 1 + I_x^2 + I_y^2 + I_z^2 = \|\nabla M\|^2$$

Définition 3 (*première forme fondamentale*) *La restriction du produit scalaire à l'espace tangent $T_{M_0}\Sigma$ en Σ au point M_0 est un produit scalaire euclidien sur cet espace vectoriel qu nous noterons $\phi_1(M_0) = \phi_1(u_0, v_0, w_0)$. Etant donné que $(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial w})$ est une base de $T_{M_0}\Sigma$ la matrice de ϕ_1 pour cette base est :*

$$F_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} & \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} & \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial w} \\ \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} & \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} & \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial w} \\ \frac{\partial \vec{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} & \frac{\partial \vec{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} & \frac{\partial \vec{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f & h \\ f & g & i \\ h & i & j \end{pmatrix}$$

ϕ_1 est appelée la première forme fondamentale de l'hypersurface Σ au point M_0.

Une application directe de la définition précédente donne la première forme fondamentale de l'hypersurface définie par la fonction des niveaux de gris en un point P_0 :

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 + I_x & I_x I_y & I_x I_z \\ \\ I_x I_y & 1 + I_y & I_y I_z \\ \\ I_x I_z & I_y I_z & 1 + I_z \end{pmatrix}$$

Définition 4 (*seconde forme fondamentale*) *La seconde forme fondamentale de l'hypersurface en un point M_0 est définie par sa matrice dans la base :*

$$(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0, w_0)\frac{\partial \vec{M}}{\partial w}(u_0, v_0, w_0))$$

En utilisant la normale à la surface $K = (u_0, v_0, w_0)$, on obtient :

$$F_2 = \begin{pmatrix} l & m & o \\ m & n & p \\ o & p & q \end{pmatrix}$$

avec :

$$l = -\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{K}}{\partial u} = \vec{K} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial u^2}$$

$$m = -\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{K}}{\partial v} = \vec{K} \cdot \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u \partial v}$$

$$o = -\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{K}}{\partial w} = \vec{K} \cdot \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u \partial w}$$

$$p = -\frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{K}}{\partial w} = \vec{K} \cdot \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial v \partial w}$$

$$q = -\frac{\partial \vec{M}}{\partial w} \cdot \frac{\partial \vec{K}}{\partial w} = \vec{K} \cdot \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial w^2}$$

$$n = -\frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{K}}{\partial v} = \vec{K} \cdot \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial v^2}$$

Une application directe de la définition 4 donne la seconde forme fondamentale en un point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{D}} \begin{pmatrix} -I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & -I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & -I_{zz} \end{pmatrix}$$

Définition 5 *L'endomorphisme de Weingarten de l'hypersurface au point M_0 est l'application L_0 telle que :*

$$L_0 : T_{M_0}\Sigma \longrightarrow T_{M_0}\Sigma$$

$$L_0(X_u \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} + X_v \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} + X_w \frac{\partial \vec{M}}{\partial w})$$

$$= -X_u \frac{\partial \vec{K}}{\partial u} - X_v \frac{\partial \vec{K}}{\partial v} - X_w \frac{\partial \vec{K}}{\partial w}$$

On peut aisément montrer que la matrice de L_0 dans la base $(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial w})$ est donnée par :

$$W = F_1^{-1} F_2$$

où F_1 et F_2 sont respectivement les matrices des première et deuxième formes fondamentales dans la base $(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial w})$.

Définition 6 *Les vecteurs propres de L_0 que nous noterons $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3$ sont appelés les directions principales de courbure, et les valeurs propres correspondantes : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les courbures principales de (Σ, M) à M_0. Le produit $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 (= det\, W)$ est la courbure gaussienne. La moyenne des valeurs des courbures : $\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3} (= \frac{trace\, W}{3})$ est la courbure moyenne.*

Remarque

Dans ce cas le signe de la courbure gaussienne n'est pas invariant [167] par changement d'orientation de la surface.

Définition 7 *Le vecteur propre de L_0 correspondant à la valeur propre de module maximum est la direction maximum de courbure $\vec{X}_m$ et la valeur propre associée λ_m est la courbure maximum.*

L'application des définitions 5,6,7 aux images 3D est directe. Ces caractéristiques différentielles peuvent être utilisées afin de caractériser les surfaces [133]. On peut montrer que les deux courbures de modules les plus importants sont reliées à la géométrie de la surface dans les cas réalistes [133]. La figure 11.17. illustre les relations fortes existant entre la courbure maximum de l'hypersurface et la courbure maximum de la surface.

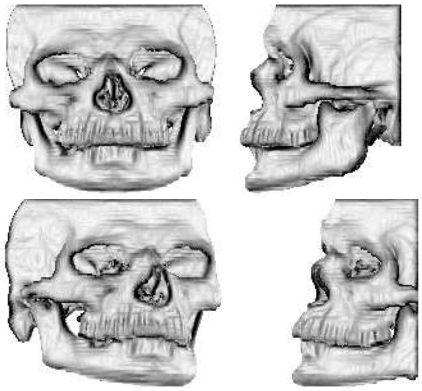


Figure 11.17. *Vues en perspective des courbures maximums de l'hypersurface pour les deux positions, aucun rendu n'est effectué : la valeur absolue de la courbure maximum est visualisée (en haut à gauche : vue de face pour la position A, en haut à droite : vue de profil pour la position A, en bas à gauche : vue de face pour la position B, en bas à droite : vue de profil pour la position B).*

11.2.3.3. Calcul des dérivées partielles d'une image 3D

On peut calculer ces dérivées avec le même type d'opérateurs de filtrage linéaire que ceux décrits au chapitre 2 pour la détection de contours. Dans cette partie, on décrit l'exemple particulier de filtres basés sur le filtre de Deriche [134]. Cependant, d'autres filtres comme le filtre gaussien peuvent être utilisé [168] (voir chapitre : “Détection de contours”). Dans les exemples présentés précédemment, on calcule les dérivées partielles de l'image avec les filtres :

$f_0(x) = c_0(1 + \alpha \mid x \mid)e^{-\alpha|x|}$, (composante de lissage);
$f_1(x) = -c_1 x\alpha^2 e^{-\alpha|x|}$, (composante de première dérivée);
$f_2(x) = c_2(1 - c_3\alpha \mid x \mid)e^{-\alpha|x|}$, (composante de seconde dérivée)
$f_3(x) = c_4\frac{\mid x \mid}{x}(c_5 + 1 - \alpha c_5 \mid x \mid)e^{-\alpha|x|}$, (composante de troisième dérivée).

Ces fonctions sont utilisées comme des filtres de convolution pour le lissage, la dérivation première et la dérivation seconde d'une fonction à une variable. Les cœfficients de normalisation $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ sont choisis de manière à assurer une réponse correcte pour une fonction polynomiale (séparable en X,Y,Z) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x)dx = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf_1(x)dx = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)dx = 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2}f_2(x)dx = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{6}f_3(x)dx = 1 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} xf_3(x)dx = 0.$$

Ces conditions assurent donc que les filtres f_0, f_1, f_2, f_3 produisent des dérivées correctes si on les applique à des polynomes. Quand les filtres sont appliqués à des données discrètes, les formules discrètes équivalentes sont utilisées pour trouver les cœfficients de normalisation. Par exemple pour un échantillonnage entier on obtient pour c_0 :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f_0(n) = 1.$$

En utilisant des versions discrètes des formules ci dessus on obtient les valeurs suivantes pour les cœfficients de normalisation dans le cas des convolutions discrètes :

$$c_0 = \frac{(1 - e^{-\alpha})^2}{1 + 2e^{-\alpha}\alpha - e^{-2\alpha}};$$

$$c_1 = \frac{-(1 - e^{-\alpha})^3}{2\alpha^2 e^{-\alpha}(1 + e^{-\alpha})};$$

$$c_2 = \frac{-2(1-e^{-\alpha})^4}{1+2e^{-\alpha}-2e^{-3\alpha}-e^{-4\alpha}};$$

$$c_3 = \frac{(1-e^{-2\alpha})}{2\alpha e^{-\alpha}};$$

$$c_4 = -\frac{(1-e^{-\alpha})^4((\alpha+1)e^{-\alpha}+\alpha-1)}{2\alpha^2 e^{-2\alpha}(1+e^{-\alpha})};$$

$$c_5 = \frac{1-e^{-\alpha}}{(\alpha+1)e^{-\alpha}+\alpha-1}.$$

La valeur de α contrôle le degré de lissage, et doit être spécifiée pour compléter la définition de : f_0, f_1, f_2, f_3.

Chaque fonction $f_{i+1}(x)$ est (par construction) proportionnelle à la dérivée de la fonction précédente $f_i(x)$, excepté en $x = 0$, si les fonctions ne sont pas différentiables.

Soit une fonction image $I = I(x, y, z)$, des filtres séparables sont utilisés pour calculer les dérivées partielles (lissées). En utilisant des indices pour noter la dérivation partielle, on utilise les approximations suivantes pour calculer les dérivées partielles :

$$I_x = (f_1(x)f_0(y)f_0(z)) * I,$$

$$I_{xx} = (f_2(x)f_0(y)f_0(z)) * I,$$

$$I_{xy} = (f_1(x)f_1(y)f_0(z)) * I,$$

$$I_{xyz} = (f_1(x)f_1(y)f_1(z)) * I,$$

$$I_{xxz} = (f_2(x)f_0(y)f_1(z)) * I,$$

$$I_{xxx} = (f_3(x)f_0(y)f_0(z)) * I.$$

Ces formules donnent des résultats exacts quand I est un polynome séparable en (x, y, z) mais dans les autres cas des résultats approchés. Ces filtres s'implantent de manière séparable et récursive ou par masque de convolution (voir chapitre 2, section 2.5.4).

11.2.3.4. Une approche multi-échelle

11.2.3.4.1. Introduction

Nous décrivons dans cette partie un exemple d'introduction de la notion d'échelle pour le problème particulier d'extraction des lignes de crête dans des images volumiques 3D [136]. Ce cas particulier illustre bien la notion d'échelle toujours présente de manière implicite ou explicite en Vision par Ordinateur et plus généralement en perception automatique. Le nombre important de travaux consacrés à la multi-résolution montre la motivation des chercheurs et aussi la difficulté de trouver des solutions générales. Ce constat est principalement dû au fait que la notion d'échelle est intuitive pour toute tâche de perception mais que la plupart des modèles mathématiques ne restitue que partiellement la notion perceptuelle.

11.2.3.4.2. Pourquoi une approche multi-échelle

Les résultats des algorithmes d'extraction de caractéristiques différentielles décrits précédemment dépendent du calcul des dérivées partielles de l'image (voir section précédente). Ainsi les caractéristiques des opérateurs mis en œuvre (α pour les filtres Deriche et σ pour les filtres gaussiens) conditionnent fortement les résultats. Pour l'extraction des lignes de crête qui correspondent aux passages par zéro du critère d'extrémalité on constate généralement les faits suivants :

- Pour des données simples, on obtient de bons résultats avec une valeur de α mais on ne sait comment trouver automatiquement cette valeur (ce qui est d'ailleurs par nature un problème de poule et d'œuf!).
- Pour des données plus complexes, la "bonne" (en fonction de critères visuels humains) valeur de α varie selon les zones de l'image.
- Pour des données bruitées, seules les lignes de crête qui sont détectées à plusieurs résolutions sont intéressantes.

Ainsi de la même manière que pour la détection de contours, une approche multi-échelle comporte un intérêt important. Le problème est : quelle approche multi-échelle? Nous donnons dans la section suivante, un exemple d'approche multi-échelle qui a le mérite de poser clairement les problèmes.

11.2.3.4.3. Exemple d'algorithme

Les principales étapes de l'algorithme d'extraction des lignes de crêtes des iso-surfaces dans une image volumique décrit précédemment sont :

1. Calcul des dérivées partielles d'ordre 1,2,3 de l'image $I(x, y, z)$ ($\dfrac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^p \partial z^q}$, $m+p+q=3$ en utilisant des filtres récursifs par exemple approximant les filtres gaussiens (voir chapitre : "Détection de contours") pour une valeur donnée de σ.

2. Détermination de la carte des contours $3D$ en utilisant les dérivées d'ordre 1 de I (voir partie : "Détection de contours 3d") ;

3. Pour chaque point de contour $3D$ calculer :

- Les deux courbures principales et les directions principales correspondantes en utilisant les formules de la partie : "relations entre les dérivées des images et les courbures des contours" ;
- Le critère d'extrêmalité (dérivée de la courbure maximum le long de la direction principale associée ;

4. Construction d'une image du critère d'extrémalité $C_\sigma(x, y, z)$ telle que pour chaque point de contour (x, y, z), $C_\sigma(x, y, z)$ prend la valeur du critère d'extrémalité et 0 sinon ;

5. Construction d'une image $Z_\sigma(x, y, z)$ mise à 1 en chaque point de contour qui est un passage par zéro du critère d'extrémalité et à 0 sinon.

La dernière étape de cet algorithme consiste à déterminer les passages par zéro d'une fonction définie sur la trace discrète d'une surface (tracée par les points de contour $3D$) ce qui est un problème difficile en soit même. On peut mettre en œuvre des méthodes simples pour extraire ces passages par zéro, mais une solution "propre" demande plus d'attention. Une solution intéressante sera trouvée dans [168].

Ainsi, la sortie finale de cet algorithme est une image Z_σ représentant l'ensemble des points de contour qui sont les passages par zéro du critère d'extrêmalité. Chaque valeur de σ définit une image Z_σ représentant les lignes de crête pour l'échelle définie par σ.

De manière à représenter et à fusionner les résultats obtenus à différentes échelles $\sigma_i, i = 1, n$, on peut par exemple utiliser une structure de données que nous appelerons “Graphe d'adjacence multi-échelle” : $G_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n}$. définie comme suit :

1. Chaque nœud de $G_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n}$ correspond à un point (i,j,k) tel que pour au moins une échelle σ_m nous avons $Z_{\sigma_m}(i,j,k) = 1$;

2. Les attributs associés à chaque nœud sont :

(a) Les coordonnées du point $3D$ correspondant : $((i,j,k))$;

(b) Les valeurs des échelles pour lesquelles ce point est un point de crête (tous les σ_p tels que $Z_{\sigma_p}(i,j,k) = 1)$;

(c) Les caractéristiques différentielles extraites pour toutes les échelles : courbures principales et directions principales de courbure, valeur du critère d'extrêmalité.

Ainsi $G_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n}$ représente les résultats de l'extraction des points de crête pour les différentes échelles et leurs relations spatiales. Cette structure de données est particulièrement efficace quand la stabilité des points de crête pour différentes échelles est un bon critère de sélection. Par exemple on peut mettre en œuvre la stratégie suivante :

1. Sélectionner les nœuds du graphe correspondant aux points qui sont points de crête pour un nombre “suffisant” d'échelles.

2. Extraire les composantes connexes qui ont un nombre suffisant de nœuds (ce seuil correspond à la longueur minimale d'une ligne de crête).

Les figures suivantes illustrent les résultats de ce type d'algorithme sur des données réelles (deux images scanner 3D du même crane pour deux positions différentes).

11.2.3.5. Conclusion

Des calculs établissent les relations mathémathiques existant entre les caractéristiques différentielles des surfaces et les caractéristiques différentielles des images 3D. L'hypothèse clé est que le gradient d'une image 3D définit un champ différentiable qui correspond en tout point de contour (trace de la surface) à la normale à la surface. Dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée, on peut rechercher des invariants de l'hypersurface définie par l'image 3D. En effet par définition les caractéristiques différentielles de l'hypersurface sont des propriétés intrinsèques (invariantes par le groupe euclidien) de l'image 3D.

On illustre ces calculs en déterminant les dérivées partielles de l'image avec des filtres récursifs du même type que ceux utilisés pour la détection des contours. De plus la largeur des filtres mis en œuvre définit de manière naturelle une notion d'échelle pour le calcul des caractéristiques différentielles. Sur des données réelles, les résultats expérimentaux sont comparables à ceux obtenus par les méthodes d'approximation locale décrites précédemment mais impliquent un coût calculatoire beaucoup moins important.

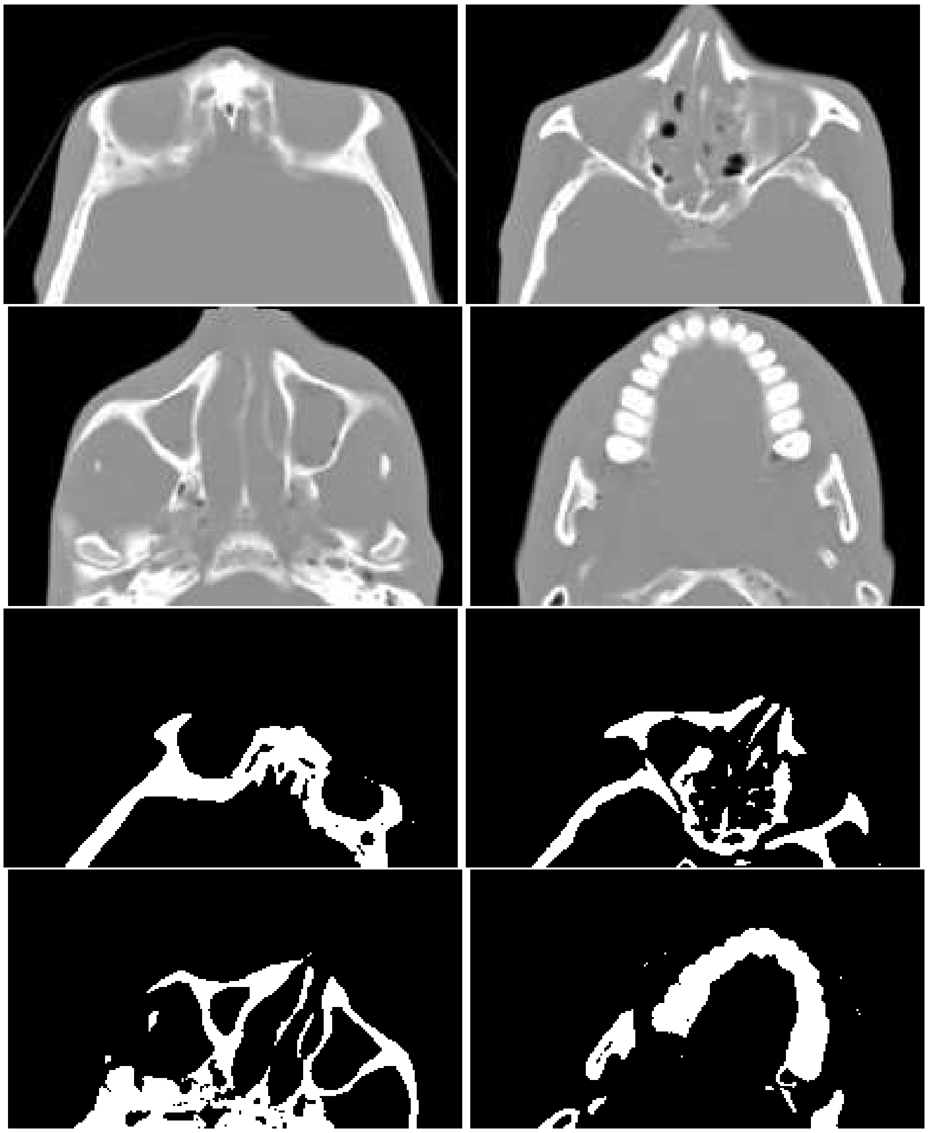


Figure 11.18. *Coupes de deux images obtenues par scanner X du même crane dans deux positions différentes A and B (dimensions des images : 192.128.151 pour la position A and 220.128.148 pour la position B). en haut : coupes correspondant à la position A, en bas : coupes correspondant à la position B.*

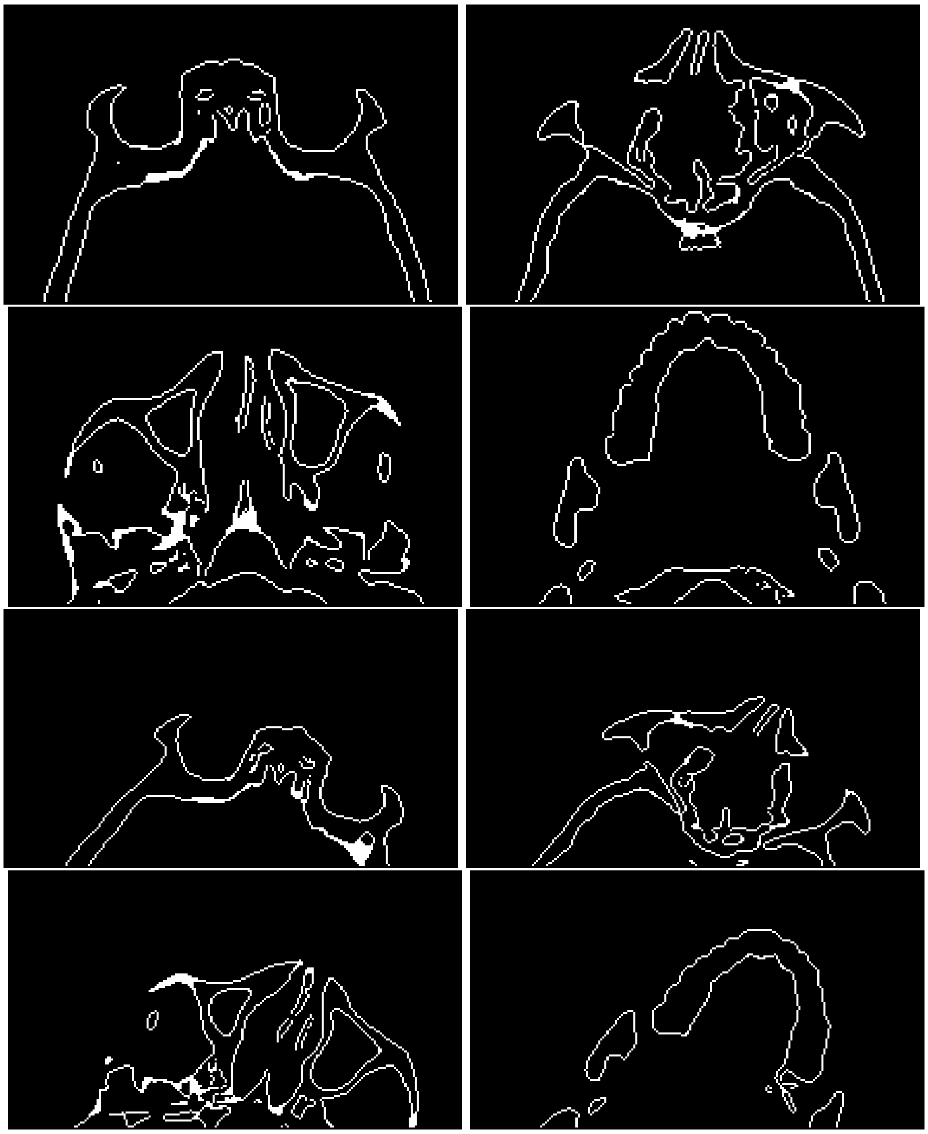


Figure 11.19. *Coupes de la carte des contours 3D correspondant à la figure précédente). En haut : coupes correspondant à la position A, En bas : coupes correspondant à la position B.*

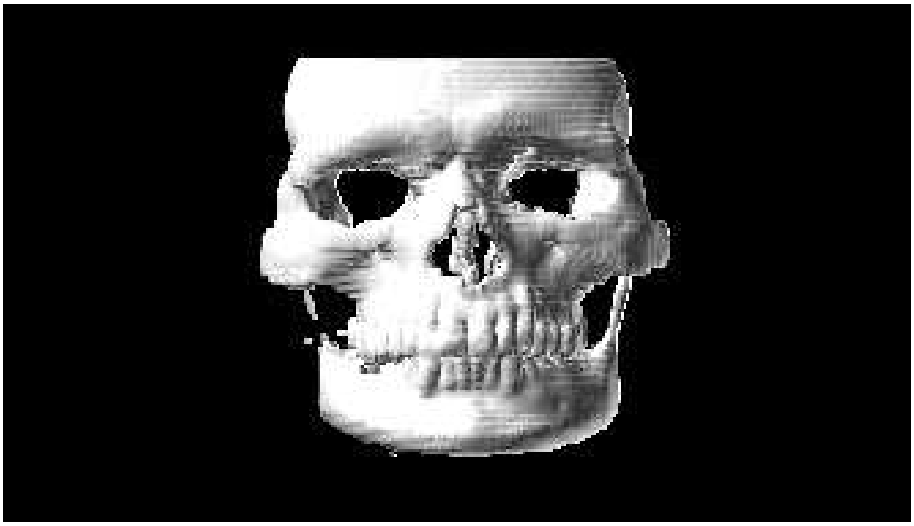


Figure 11.20. *Vue en perspective de la carte des contours 3D pour la position A*

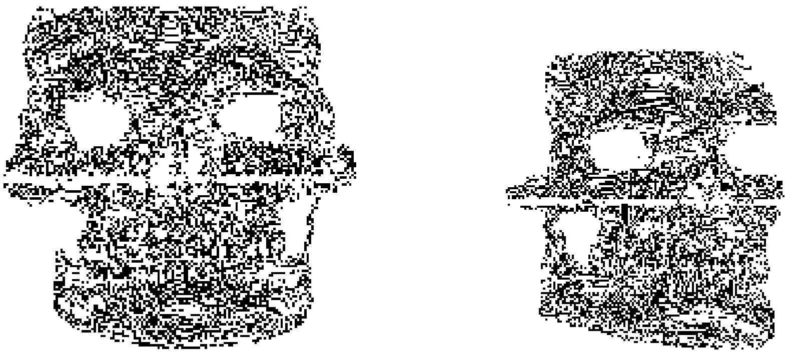


Figure 11.21. *Vue en perspective des lignes de crête pour les positions A et B (σ est égal à 1)*

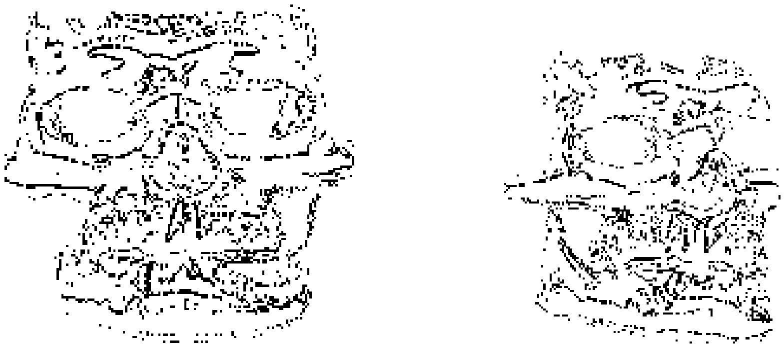


Figure 11.22. σ *est égal à* 3

Figure 11.23. σ *est égal à* 5

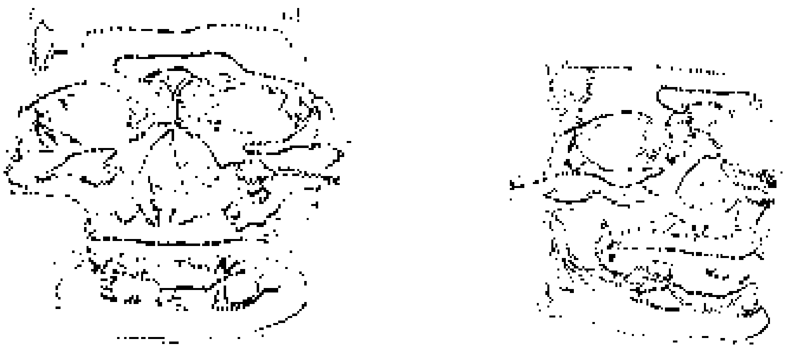


Figure 11.24. σ *est égal à* 7

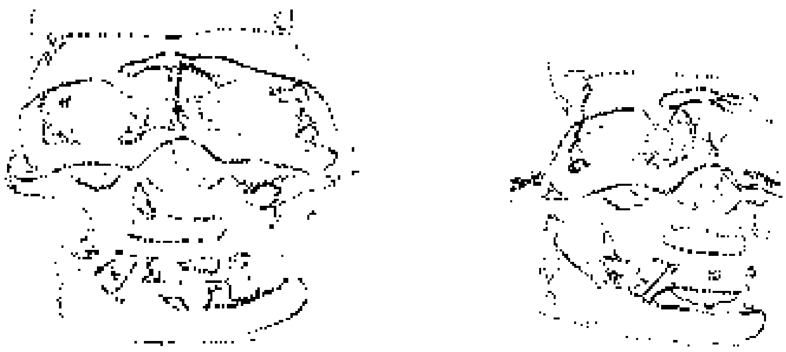


Figure 11.25. *σ est égal à 9*

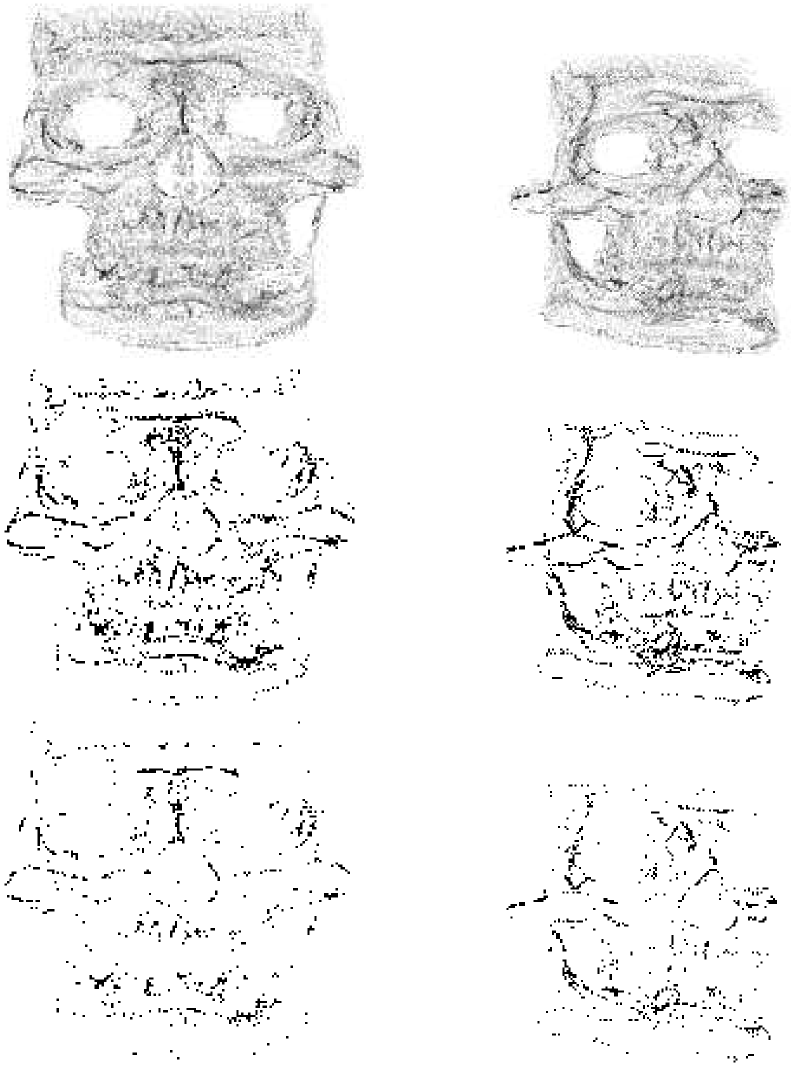


Figure 11.26. *En haut : vues en perspective correspondant aux positions A (gauche) et B (droite), le niveau de gris correspond au nombre d'échelles pour lesquelles le point est un point de crête ; au milieu : vues en perspective correspondant aux positions A (gauche) et B (droite) où seuls les points qui sont points de crête pour au moins 4 échelles sont marqués ; en bas : vues en perspective correspondant aux positions A (gauche) et B (droite) où seuls les points qui sont points de crête pour au moins 5 échelles sont marqués*