

Rôle clé de la Modélisation en “Shape From Shading”

Key aspect of the modeling in Shape From Shading.

E. Prados¹

O. Faugeras²

¹ UCLA Vision Lab. (USA)

² INRIA Sophia Antipolis (France)

420 Westwood Plaza, UCLA computer science Dept., Los Angeles, CA 90095-1594, USA.
eprados@cs.ucla.edu

Résumé

Le problème du “Shape From Shading” (SFS) consiste à reconstruire la forme tri-dimensionnelle d’une surface à partir d’une unique image noir et blanc de cette surface. Le “Shape From Shading” est connu comme étant un problème mal posé. Dans cet article, nous montrons que si nous modélisons le problème de manière différente de celle qui est habituellement proposée (plus précisément en prenant en compte l’atténuation de l’éclairage due à la distance), le “Shape From Shading” devient complètement bien posé. Ainsi l’information d’ombrage permet, à elle seule, de reconstruire (presque) n’importe quelle surface à partir d’une unique image (de cette surface). Aucune donnée additionnelle telle que la hauteur de la solution aux “minima” locaux (contrairement à [7, 28, 12, 31, 15]) et aucune hypothèse de régularité (contrairement à [20, 13], par exemple) ne sont nécessaires.

Plus précisément, nous reformulons le problème sous la forme d’une nouvelle Equation aux Dérivées Partielles (EDP), nous développons une étude mathématique complète de cette équation, enfin nous proposons une nouvelle méthode numérique permettant de résoudre cette équation. Par ailleurs, nous prouvons la convergence de notre méthode. Nous démontrons aussi expérimentalement la pertinence de notre nouvelle méthode en l’appliquant avec succès à diverses images synthétiques et réelles.

Mots Clef

Shape From Shading, reconstruction 3D, modélisation, réflectance, illumination, EDP, solutions de viscosité.

Abstract

Shape From Shading (SFS) is known to be an ill-posed problem. We show in this paper that if we model the problem in a different way than it is usually done, more precisely by taking into account the $1/r^2$ attenuation term of the illumination, Shape From Shading becomes completely well-posed. Thus the shading allows to recover (almost)

any surface from only one image (of this surface) without any additional data (in particular, without the knowledge of the heights of the solution at the local intensity “minima”, contrary to [7, 28, 12, 31, 15]) and without regularity assumptions (contrary to [20, 13], for example). More precisely, we formulate the problem as that of solving a new Partial Differential Equation (PDE), we develop a complete mathematical study of this equation and we design a new provably convergent numerical method. Finally, we present results of our new Shape From Shading method on various synthetic and real images.

Keywords

Shape From Shading, 3D reconstruction, modeling, reflectance, illumination, PDEs, viscosity solutions.

1 Introduction

Le problème du “Shape From Shading” (SFS) a été un problème central en vision par ordinateur dès les premiers temps. Le problème consiste à calculer la forme tri-dimensionnelle d’une surface à partir d’une seule image 2D de cette surface. Ce problème est connu comme étant mal posé. En particulier, un grand nombre d’articles montrent que la solution n’est pas unique [22, 19, 31, 4, 9, 28]. Ces difficultés ont souvent été illustrées par des ambiguïtés concaves/convexes telles que celle décrite dans la Figure 1. Dans cette figure, l’ambiguïté est due à un changement dans l’estimation des paramètres de l’éclairage. En fait ce type d’ambiguïté peut se généraliser : dans [4], Belhumeur et ses co-auteurs démontrent que lorsque la direction de l’éclairage¹ ainsi que l’albedo de la surface (dans le cas d’une réflectance Lambertienne) sont inconnues, alors la même image peut être obtenue à partir d’une famille continue de surfaces (dépendant linéairement de trois paramètres); voir Figure 4. En d’autres termes, ils montrent que, seuls, ni les ombres portées, ni l’information d’ombrage (“shading”), présentes dans une unique image d’un

¹Dans le cas d’une source de lumière éloignée.

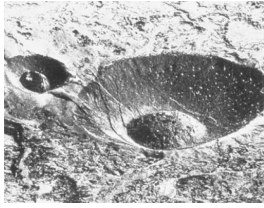


FIG. 1 – Premier exemple d’ambiguïté du “Shape From Shading” : l’illusion du cratère [22]. En regardant cette image, nous voyons deux cratères, un petit et un grand. Nous pouvons transformer ces cratères en volcans (bien qu’à l’envers) si nous imaginons que la source de lumière est placée au-dessous de la surface photographiée plutôt qu’au-dessus. Cette photographie est en fait celle de volcans situés dans les îles Hawaïennes, et non pas de cratères.

objet, ne peuvent révéler sa structure 3D exacte. C’est “l’Ambiguïté du Bas-relief”.

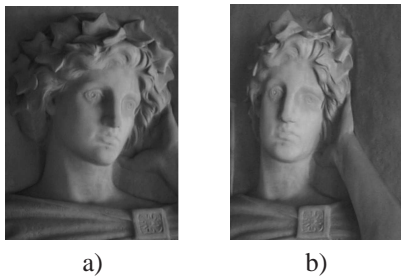


FIG. 2 – Deuxième exemple : l’“Ambiguïté du Bas-relief” [4]. Vues frontale et de profil d’une sculpture en bas-relief. Remarquons comme la vue frontale a) semble avoir une profondeur 3D correcte, tandis que la vue de profil b) révèle l’écrasement. Ceci prouve donc que l’image a) peut être obtenue par deux surfaces : la surface 3D que nous imaginions en regardant l’image a) et l’actuel bas-relief qui est à l’origine des deux photos a) et b). Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [4].

Etant conscients de ces difficultés, nous supposons donc dans cet article que tous les paramètres de la source de lumière, de la réflectance de la surface et de l’appareil photographique sont connus. Cependant cette connaissance n’est pas suffisante pour s’affranchir de certaines ambiguïtés concaves/convexes. En fait, même avec des conditions expérimentales complètement contrôlées, les méthodes classiques de SFS sont limitées par ce type de difficultés, voir [19, 31, 28]. Par exemple, dans le cas “Eikonal”, Rouy et Tourin [31] supposent que l’appareil photographique effectue une projection orthographique de la scène, que la surface est Lambertienne et que la source de lumière est frontale et disposée à l’infini. Dans cette situation, une dualité concave/convexe apparaît clairement. Par exemple, les surfaces représentées dans les Figures 3-a) et 3-b) donnent les mêmes images. Cette singularité est aussi présente pour des surfaces plus complexes comme celles représentées dans la

figure 4. Les surfaces dans 4-b) et 4-c) ont été obtenues à partir des surfaces 4-a) en appliquant des symétries horizontales.

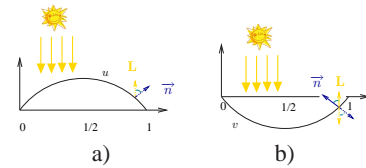


FIG. 3 – Dualité concave/convexe dans le cadre Eikonal : Les surfaces a) et b) donnent la même image.

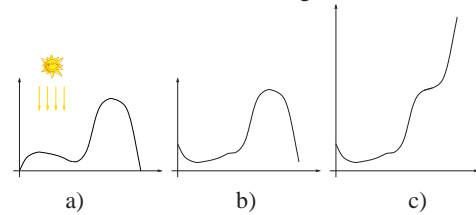


FIG. 4 – Conséquences de la dualité concave/convexe dans le cadre Eikonal. Exemples de surfaces plus complexes. Les surfaces a), b) et c) donnent toutes la même image.

Aujourd’hui, cette ambiguïté concave/convexe est bien comprise. Elle est due à l’existence de points singuliers², voir par exemple [31]. La présence des points singuliers est due à la modélisation. En particulier elle est due au fait que les auteurs supposent que la scène est éclairée par une source de lumière disposée à l’infini³. Cette ambiguïté est valable même lorsque la direction de l’éclairage ne correspond pas avec celle de l’axe optique. Elle se produit aussi bien dans le problème du SFS orthographique [31, 7] que dans celui du SFS perspectif [29, 32, 5]. Pour une étude complète et détaillée, le lecteur peut se référer à [28, 29]. Cependant, *en contradiction avec tous ces résultats, nous démontrons dans cet article que le problème du SFS peut être complètement bien posé* (existence et unicité de la solution). Ce résultat est obtenu en considérant une nouvelle modélisation, légèrement différente des modélisations classiques présentes dans la littérature.

Les résultats présentés dans certaines études récentes sur le SFS, par exemple [36, 8] dans le cadre traditionnel, c’est-à-dire surface Lambertienne + source de lumière à l’infini + projection orthographique, sont assez insatisfaisants, même avec des images synthétiques parfaites (sans bruit additionnel), obtenues à partir de formes très simples et vérifiant exactement les hypothèses de la modélisation. Certains auteurs ont tenté d’améliorer l’applicabilité de leurs méthodes de SFS en modélisant la physique du problème de manière plus réaliste. Par exemple, Lee et Kuo [16] considèrent des cas non Lambertiens et tandis que plusieurs autres auteurs [16, 35, 28, 33, 5, 26] (parmi d’autres), prennent en compte l’effet de perspective. Cependant, en

²Les points singuliers sont les pixels de l’image correspondant aux points de la surface pour lesquels le vecteur normal coïncide avec la direction de la lumière. Ces points ont une intensité maximale.

³Ou bien au fait qu’ils négligent le terme d’atténuation en $1/r^2$ dans l’équation de brillance, voir la remarque de la section 2.

un sens, ces travaux peuvent paraître un peu prématurés puisqu’ils se basent sur un problème mal posé sans essayer au préalable de changer ce statut. Nous montrons dans cet article comment un simple changement dans la modélisation du problème peut rendre le problème du SFS complètement bien posé (existence, unicité, stabilité de la solution).

Précisément, nous supposons ici que l’appareil photographique effectue une projection en perspective de la scène et que la source de lumière est située au centre optique. Cependant, contrairement à [28, 27, 29], nous ne négligeons pas le terme d’atténuation en $1/r^2$ (voir la section 2). Comme démontré dans la section 4, ce “nouveau” terme rend le problème mieux posé. En particulier, la notion de points singuliers disparaît de même que la dualité concave/convexe.

Après avoir déduit une *nouvelle équation explicite* de cette modélisation (sections 2 et 3), nous développons une *étude théorique complète* de cette équation (section 4). Nous proposons un nouvel *algorithme* permettant de calculer des solutions numériques au problème (section 5). Nous prouvons de plus la convergence de notre algorithme. Finalement, nous démontrons la pertinence de notre approche en donnant quelques résultats expérimentaux sur des images synthétiques et réelles (section 6).

2 Modélisation du problème du SFS

Dans cette section, nous rappelons le processus de formation d’une image. Pour ce faire, nous remonterons les rayons de lumière à partir du centre optique jusqu’à la source de lumière. Pour plus de détails, voir [11].

La brillance des pixels de l’image (supposée être égale à l’irradiance de l’image E_i) est substantiellement proportionnelle à la radiance de la surface⁴ L_s :

$$E_i = \alpha L_s, \quad (1)$$

où le paramètre α dépend de paramètres intrinsèques à l’appareil photographique⁵. Nous supposons ensuite que la scène est éclairée par une source de lumière composée d’un seul point et qu’il n’y a pas d’inter-réflexions. Dans ce cas, la relation entre la radiance L_s d’un point de la surface⁴ avec la normale à la surface (en ce point) et la direction de la source de lumière est donnée par la BRDF (“Bi-directional Reflectance Distribution Function”), voir [11] :

$$L_s = F(\theta_i, \theta_r, \phi_r) E_s, \quad (2)$$

où E_s est l’irradiance de la surface et les angles θ_i , θ_r et ϕ_r sont décrits dans la figure 5. Dans cette figure, N est la normale à la surface de l’objet, L est la direction de la source de lumière, et V est la direction de l’observateur. θ_i est l’angle entre L et N , et θ_r est l’angle entre V et N , respectivement. ϕ_r est l’azimut entre L et V par rapport à la normale N .

⁴ c’est-à-dire la radiance de la surface dans la direction de l’observateur.

⁵ Tels que le diamètre de la lentille, la distance focale, etc. . .

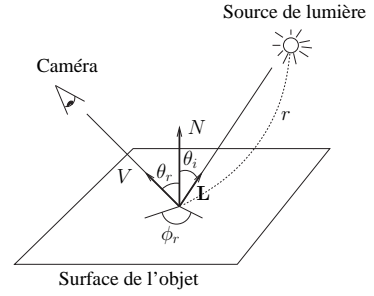


FIG. 5 – Le système de coordonnées locales de la surface (voir [17, 11]).

Dans le cas d’une surface *Lambertienne*, la BRDF est constante, ainsi :

$$L_s = \frac{1}{\pi} E_s. \quad (3)$$

Finalement, l’irradiance E_s d’un point de la surface est donnée par (voir [11]) :

$$E_s = I_0 \frac{\cos \theta_i}{r^2} \quad (4)$$

où I_0 est l’intensité de la source de lumière, r est la distance entre la source de lumière et le point de la surface, et θ_i est l’angle entre la normale à la surface de l’objet et la direction de la source de lumière.

En combinant (1), (3) et (4), l’intensité de l’image est alors donnée par :

$$E_i = \sigma \frac{\cos \theta_i}{r^2}, \quad (5)$$

où σ est un coefficient constant lié aux paramètres du système d’acquisition de l’image (appareil photographique) et à l’intensité de la source de lumière.

Remarque: Si la source de lumière est située suffisamment loin de la surface, les variations de l’intensité de l’image sont dues essentiellement à celles de $\cos \theta_i$ et nous pouvons supposer que r est constant. Dans ce cas, la brillance de l’image est donnée par :

(σ_2 étant un coefficient constant)

$$E_i = \sigma_2 \cos \theta_i. \quad (6)$$

Contrairement à la majorité des autres méthodes de SFS (qui modélisent le problème avec une source de lumière *éloignée* et une *projection orthographique*), dans cet article nous considérons que l’appareil photographique effectue une **projection en perspective** et nous supposons que la scène est éclairée par une source de lumière ponctuelle **localisée au centre optique**. Insistons par ailleurs sur la pertinence de cette modélisation dans de nombreuses applications. En effet, celle-ci correspond approximativement aux situations rencontrées dans un certain nombre de protocoles expérimentaux tels qu’en endoscopie [17, 27], et lors de l’utilisation d’un appareil photographique équipé d’un flash [27].

3 Formulation mathématique du problème du SFS

Dans cette section, nous formulons le problème du SFS sous la forme d'une équation aux dérivées partielles. Nous décrivons une équation explicite découlant de l'équation (5) et nous détaillons les Hamiltoniens associés⁶.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 . Ω représente le domaine de l'image, c'est-à-dire, le rectangle $]0, X[\times]0, Y[$. Nous représentons la scène par une surface $\mathcal{S} = \{S(x); x \in \bar{\Omega}\}$, qui est paramétrée explicitement en utilisant la fonction $S : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $S(x) = \frac{f u(x)}{\sqrt{|x|^2 + f^2}} (x, -f)$; $f > 0$ représentant la distance focale, voir la Figure 6.

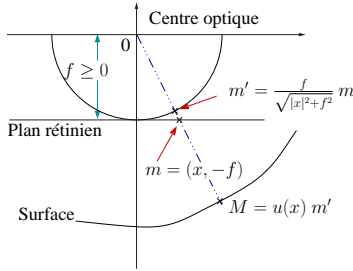


FIG. 6 – L'intensité du "pixel" $(x, -f)$ est associée à l'irradiance au point $u(x) \frac{f}{\sqrt{|x|^2 + f^2}} (x, -f)$ sur la surface.

Pour une telle surface \mathcal{S} , un vecteur normal $\mathbf{n}(x)$ au point $S(x)$ est donné par⁷ :

$$\mathbf{n}(x) = f \nabla u(x) - \frac{f u(x)}{|x|^2 + f^2} x, \nabla u(x) \cdot x + \frac{f u(x)}{|x|^2 + f^2} f$$

Pour $y \in \mathbb{R}^3$, nous notons $\mathbf{L}(y)$ le vecteur unitaire représentant la direction de la source de lumière au point y . Ici nous supposons que la **source de lumière est située au centre optique**, donc le vecteur $\mathbf{L}(S(x))$ est égal à : $\mathbf{L}(S(x)) = 1/\sqrt{|x|^2 + f^2} (-x, f)$. Par ailleurs, nous supposons que la surface est **Lambertienne**. Si nous notons $I(x) = \frac{E_i(x)}{\sigma}$, l'équation de brillance (5) devient⁸ :

$$I(x) = \frac{\cos \theta_i}{r^2}. \quad (7)$$

Comme $\cos \theta_i$ est le produit scalaire $\mathbf{L}(S(x)) \cdot \frac{\mathbf{n}(x)}{|\mathbf{n}(x)|}$ et $r = f u(x)$, nous obtenons de (7) l'EDP suivante⁹ :

$$I(x) f^2 \frac{\sqrt{[f^2 |\nabla u|^2 + (\nabla u \cdot x)^2]/Q(x)^2 + u^2}}{u} - u^{-2} = 0 \quad (8)$$

où $Q(x) = \sqrt{f^2/(|x|^2 + f^2)}$. Supposons que la surface \mathcal{S} soit visible (c'est-à-dire devant le centre optique). Dans ce cas

⁶Pour plus de détails sur la notion d'Hamiltonien, le lecteur pourra se référer à [2].

⁷Les deux colonnes de la Jacobienne $DS(x)$ sont des vecteurs tangents à \mathcal{S} au point $S(x)$. Leur produit vectoriel est un vecteur normal.

⁸Nous supposons que tous les paramètres de l'appareil photographique, de la source de lumière et de la surface sont connus. Ainsi σ et donc $I(x)$ sont connus.

⁹Note : dans l'équation (8), ∇u et u dépendent de x

u est strictement positif, voir la Figure 6. Nous pouvons donc simplifier l'équation (8) en utilisant le *changement de variables* $v = \ln(u)$:

$$-e^{-2v(x)} + J(x) \sqrt{f^2 |\nabla v(x)|^2 + (\nabla v(x) \cdot x)^2 + Q(x)^2} = 0, \quad (9)$$

où $J(x) = \frac{I(x) f^2}{Q(x)}$ est une fonction positive. A cette équation, nous associons l'*Hamiltonien*

$$H_{att}(x, u, p) = -e^{-2u} + J(x) \sqrt{f^2 |p|^2 + (p \cdot x)^2 + Q(x)^2}.$$

4 Une modélisation rendant le problème du SFS complètement bien posé

4.1 Travaux et résultats précédents

A notre connaissance, seuls Okatani et Deguchi [17], et Prados et Faugeras [28, 27] traitent le modèle considéré ici (projection en perspective et source de lumière au centre optique).

Dans [17], Okatani et Deguchi ne formalisent pas le problème sous la forme d'EDP explicites (en particulier l'équation (9)), et ne formulent pas l'Hamiltonien associé H_{att} . Insistons sur le fait qu'énoncer le problème sous la forme d'EDP explicites est un premier pas fondamental en vue d'une étude théorique, par exemple pour démontrer l'unicité de la solution. Aussi Okatani et Deguchi n'abordent pas les questions théoriques concernant l'existence et l'unicité de la solution. Ils proposent uniquement une méthode numérique basée sur la propagation de contours équidistants, transformant l'équation statique (5) en une équation d'évolution.

Dans [28, 27, 29], Prados et Faugeras traitent l'équation (6) mais pas l'équation (5). Ils négligent le terme d'atténuation de la lumière en $1/r^2$. En simplifiant ainsi la modélisation, on pourrait penser que l'on simplifie le problème. Mais au contraire, en fait, on le rend plus complexe. En effet, comme expliqué dans [28, 29] dans ce contexte le problème devient mal posé. En raison de l'existence des points singuliers, l'unicité de la solution n'est plus valable. Pour surmonter cette difficulté, Prados et ses co-auteurs [28, 24, 25] caractérisent une solution maximale en utilisant des outils mathématiques sophistiqués. Ils proposent une méthode basée sur les solutions de viscosité qui ne nécessite pas obligatoirement de conditions aux bords, dans le sens où ils peuvent calculer une solution¹⁰ simplement en fixant la hauteur de la solution à l'un des points singuliers. Cependant, même s'ils obtiennent d'excellents résultats numériques avec des images réelles contenant un unique point singulier [27], ils ne peuvent pas reconstruire une surface contenant plusieurs "minima" locaux tels que ceux présents sur la figure 7-I sans données additionnelles¹¹. Conscients du rôle majeur des points singuliers,

¹⁰Qui peut être différente de la surface de départ.

¹¹Ils ont besoin de connaître les valeurs de la solution à tous les "minima" locaux.

Oliensis et Dupuis [20], et Kimmel et Bruckstein [13] proposent des méthodes “globales” (basées sur la nature de ces points particuliers) permettant de retrouver certaines surfaces *lisses* et vérifiant plusieurs hypothèses¹² (dans le cas où ces surfaces existent). Dans [18], Okatani et Deguchi utilisent les “isophotes” de l’image pour classer une partie des points singuliers. Ils indiquent également comment utiliser les informations obtenues pour tester les méthodes globales de Dupuis and Oliensis [20] et de Kimmel et Bruckstein [13]. Notons que bien que les articles [20, 13, 18] soient basés sur une projection orthographique et une unique source de lumière éloignée, leurs travaux peuvent facilement s’étendre à la modélisation plus réaliste de [27] en utilisant les outils développés dans [28, 24, 25]. Cependant dans la pratique (en raison du bruit, des erreurs de paramètres et d’une modélisation incorrecte) les équations de SFS telles que celles considérées dans [20, 13, 18, 27] (et plus généralement celles décrites dans [28, 29]) n’ont pas de solutions au sens classique ! Ainsi, ces méthodes globales sont assez décevantes lorsqu’on les applique à des images réelles.

Contrairement à tous les travaux précédents [31, 28, 27, 20, 13, 18] qui sont gênés par l’existence des points singuliers, insistons sur le fait que *la notion même de points singuliers n’a plus aucun sens dès que nous ne négligeons plus l’atténuation de la lumière due à la distance (terme en $1/r^2$)*. Par conséquent les difficultés décrites ci-dessus disparaissent complètement.

4.2 Un problème bien posé

Les résultats présentés dans cette section sont basés sur la notion de solutions de viscosité (discontinues) des EDP d’Hamilton-Jacobi. Rappelons que les solutions de viscosité sont des solutions au sens faible et que les solutions (différentiables) classiques sont en particulier des solutions de viscosité. Pour plus de détails à ce sujet, nous invitons le lecteur à parcourir le livre pédagogique de Barles [2]. Pour une approche intuitive liée à la vision par ordinateur, voir par exemple [29, 23].

Vu que les capteurs CCD ont une taille finie, nous pouvons naturellement supposer que l’ensemble Ω est *borné*. Dans ce cas, il est bien connu que les équations d’Hamilton-Jacobi de la forme $H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \forall x \in \Omega$, (et donc notre nouvelle équation de SFS (9)) n’ont pas une unique solution de viscosité [2]. Cependant, pour assurer l’unicité, il suffit d’ajouter des “*contraintes d’état*” sur le bord de l’image. Déjà, dans [28, 24, 25] (mais aussi implicitement, dans [7]) il est démontré que l’idée des contraintes d’état fournit une notion de conditions au bord plus adaptée que celle de Dirichlet ou Neumann. La “*contrainte d’état*” est un condition au bord qui est réduite à

$$H(x, u(x), \nabla u(x)) \geq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

¹²Ils considèrent des surfaces C^2 dont les dérivées du second ordre satisfont certaines propriétés : par exemple, Kimmel et Bruckstein [13] considèrent des surfaces paramétrées par des fonctions de Morse (avec des Hessiennes non dégénérées).

au sens des solutions de viscosité (voir par exemple [2, 1, 24, 25]). Cette contrainte correspond à des conditions de Dirichlet “*infinies*”, i.e :

$$\forall x \in \partial\Omega, \quad u(x) = +\infty \quad (10)$$

au sens des solutions de viscosité. Compléter une EDP par des contraintes d’état est du point de vue pratique, équivalent à choisir la solution de viscosité la plus grande. L’intérêt de cette contrainte est double : 1) contrairement aux conditions au bord de Dirichlet et Neumann, les contraintes d’état ne nécessitent aucune donnée¹³. 2) pour notre équation de SFS, la notion de contraintes d’état est à peu près équivalente à “ *$u(x)$ augmente quand x tend vers $\partial\Omega$* ”¹⁴. Insistons sur le fait qu’en pratique cette contrainte est très faible : par exemple la condition est satisfaite dès que l’image à traiter contient un objet d’intérêt en face de l’arrière-plan.

De manière à démontrer l’unicité de la solution avec des contraintes d’état, nous utilisons le théorème¹⁵

Théorème 1 *Soit Ω borné et “suffisamment lisse”¹⁵ et $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ continu. Si les hypothèses (H1)-(H2) et les hypothèses au bord (H3)-(H4) (décrites ci-dessous) sont vérifiées, alors l’équation $H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \forall x \in \Omega$, complétée par des contraintes d’état sur $\partial\Omega$ possède une unique solution de viscosité (discontinue) sur Ω .*

Les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) sont : $\forall R > 0$, il existe $m_R(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$ tel que, pour tout $-R \leq v \leq u \leq R$ et $p, q \in \mathbb{R}^2$:

- (H1) $H(x, u, p) - H(x, v, p) \geq \gamma_R(u - v), \forall x \in \Omega$ ($\gamma_R > 0$) ;
- (H2) $|H(x, u, p) - H(y, u, p)| \leq m_R(|x - y|(1 + |p|)), \forall x, y \in \Omega$;
 $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ étant un voisinage de $\partial\Omega$,
- (H3) $|H(x, u, p) - H(x, u, q)| \leq m_R(|p - q|), \forall x \in \Gamma$;
- (H4) $H(x, u, p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$ uniformément par rapport à $x \in \Gamma$ et p dans tout sous-ensemble compact de \mathbb{R}^2 .

Nous pouvons démontrer¹⁶ que le Théorème 1 s’applique à l’Hamiltonien du SFS H_{att} dès que l’intensité de l’image I est différentiable et vérifie : il existe $\delta > 0$ et M tels que $\delta \leq I(x) \leq M$ et $|\nabla I(x)| \leq M$. Ces hypothèses sont raisonnables car avec notre modélisation, la brillance de l’image est toujours bornée et il n’y a pas d’ombres portées. Ainsi, l’équation de SFS (9) complétée par des contraintes d’état sur le bord de l’image a une unique solution de viscosité. En pratique, si la surface réelle produisant l’image est globalement croissante quand x s’approche du bord de l’image, alors cette surface correspond à la solution de viscosité de (9) complétée par (10) (nous

¹³Les conditions au bord de Dirichlet (respectivement, Neumann) nécessitent la connaissance des valeurs de la solution (respectivement, des dérivées de sa normale) sur le bord de l’image. Dans le problème du SFS de telles données sont rarement disponibles.

¹⁴Une description plus rigoureuse de cette contrainte est détaillée dans [30, 24, 25]. Par manque de place, nous ne pouvons la développer ici.

¹⁵Théorème 4.6 de [2]. Ω “suffisamment lisse” signifie $\Omega \in W^{2,\infty}$.

¹⁶Par manque de place, nous ne pouvons développer la preuve ici. Celle-ci est détaillée dans [30, 23].

l'avons donc caractérisée). Nous sommes capables de la retrouver (puis de la calculer, cf section 5) sans fournir de données au bord. Insistons sur le fait que ce résultat d'unicité ainsi que la correspondance de la solution de viscosité avec la surface réelle restent valables même lorsque la surface réelle possède plusieurs minima locaux sur Ω . En particulier, nous n'avons pas besoin d'imposer de contraintes aux points singuliers¹⁷. En d'autres termes les ambiguïtés concaves/convexes liées à la présence des points singuliers disparaissent complètement.

5 Algorithme proposé

Dans [17], Okatani et Deguchi décrivent une méthode numérique basée sur la propagation des "isocontours". Comme Bruckstein et Kimmel [14] pour l'équation Eikonale, ils réécrivent le problème sous la forme d'une équation d'évolution et ils proposent de la résoudre en utilisant des techniques de "level-set" [21]. Bien que la méthode de Okatani et Deguchi soit rigoureuse, elle présente un inconvénient important car elle nécessite un *contour initial équidistant* (un "isocontour"). Les conséquences sont doubles. Premièrement, cela diminue le potentiel de la méthode en pratique puisque de telles données (contour initial équidistant et hauteur de ce contour) ne sont généralement pas disponibles. Deuxièmement, lorsqu'elles sont disponibles, ces données (qui sont potentiellement bruitées) perturbent en fait la reconstruction. Ce besoin est en effet en contradiction avec la théorie : comme nous l'avons démontré, avec notre approche la caractérisation de la solution, et donc son calcul, ne requiert aucune donnée additionnelle. Cela montre également l'intérêt des analyses théoriques comme celles présentées dans la section 4.

Nous proposons ici une nouvelle méthode numérique. Contrairement à [17], *notre méthode ne nécessite aucune donnée* (en particulier, elle ne nécessite pas un contour initial équidistant) et nous *prouvons sa convergence*. Nous démontrons que notre schéma d'approximation est *stable, consistant* et que *ses solutions convergent vers l'unique solution de viscosité* du problème. Nous prouvons alors que les solutions numériques calculées par notre algorithme itératif convergent vers les solutions de notre schéma. Notons qu'Okatani et Deguchi ne considèrent aucunement de telles questions dont l'importance est généralement sous-estimée. En particulier, elles permettent de garantir la robustesse des algorithmes et de décrire leurs limitations. . .

5.1 Schéma d'approximation

Dans cette section, nous proposons un schéma d'approximation basé sur les différences finies. Le lecteur non familier avec la notion de schémas d'approximation peut se référer à [3]. Rappelons simplement que, suivant [3], un schéma d'approximation est une équation fonctionnelle de la forme

$$S(\rho, x, u(x), u) = 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

¹⁷Rappelons que la notion de points singuliers n'a plus aucun sens dans ce contexte !

qui "approxime" l'EDP considérée. S est définie sur $\mathcal{M} \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times B(\bar{\Omega})$ dans \mathbb{R} , $\mathcal{M} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et $\rho = (h_1, h_2) \in \mathcal{M}$ définit la taille de la grille utilisée dans les algorithmes numériques sous-jacents. $B(D)$ est l'espace des fonctions bornées définies sur l'ensemble D .

Description du schéma d'approximation. Considérons la fonction $H_C : \Omega \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ donnée par :

$$H_C(x, p) = J(x) \sqrt{f^2 |p|^2 + (p \cdot x)^2 + Q(x)^2}.$$

Nous avons donc

$$H_{att}(x, u, p) = -e^{-2u} + H_C(x, p).$$

Comme Prados et Faugeras dans [28], nous pouvons démontrer que

$$H_C(x, p) = \sup_{a \in A} \{-f_c(x, a) \cdot p - l_c(x, a)\}$$

où A est la boule unité fermée de \mathbb{R}^2 ($f_c(x, a)$ et $l_c(x, a)$ sont détaillées dans [30, 29, 23]). Suivant [28, 29], nous approchons donc $H_C(x, \nabla u(x))$ par :

$$\begin{aligned} H_C(x, \nabla u(x)) &\approx \\ \sup_{a \in A} \left\{ \sum_{i=1}^2 (-f_i(x, a)) \frac{u(x) - u(x + s_i(x, a) h_i \vec{e}_i)}{-s_i(x, a) h_i} - l_c(x, a) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

où $f_i(x, a)$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de $f_c(x, a)$ et $s_i(x, a)$ est son signe. Ainsi, nous obtenons l'approximation :

$$\begin{aligned} H_{att}(x, u(x), \nabla u(x)) &\approx -e^{-2u(x)} + \\ \sup_{a \in A} \left\{ \sum_{i=1}^2 (-f_i(x, a)) \frac{u(x) - u(x + s_i(x, a) h_i \vec{e}_i)}{-s_i(x, a) h_i} - l_c(x, a) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

En multipliant (12) par un incrément de temps fictif $\Delta\tau(x) > 0$ et en ajoutant $u(x)$ et $-u(x)$ nous obtenons le schéma $S(\rho, x, u(x), u) = 0$ avec S défini par :

$$\begin{aligned} S(\rho, x, t, u) &= t - \Delta\tau e^{-2t} \\ &+ \sup_{a \in A} \left\{ -1 - \Delta\tau \sum_{i=1}^2 \frac{|f_i(x, a)|}{h_i} u(x) \right. \\ &\left. - \Delta\tau \sum_{i=1}^2 \frac{|f_i(x, a)|}{h_i} u(x + s_i(x, a) h_i \vec{e}_i) - \Delta\tau l_c(x, a) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Stabilité de nos schémas d'approximation.

Définition 1 *Un schéma S est dit stable¹⁸ si, pour toute grille fixée de taille ρ , il possède des solutions et si toutes les solutions sont bornées indépendamment de ρ .*

Pour démontrer la stabilité de notre schéma, il est principalement suffisant de s'assurer de la monotonie du schéma (c'est-à-dire que la fonction $u \mapsto S(\rho, x, t, u)$ soit décroissante) et que l'application $t \mapsto S(\rho, x, t, u)$ soit croissante, voir [23]. Ici, la fonction $t \mapsto S(\rho, x, t, u)$ est clairement

¹⁸ Suivant les définitions de Barles et Souganidis [3].

croissante. Par contre, la fonction $u \mapsto S(\rho, x, t, u)$ n'est pas monotone pour tout $\Delta\tau(x)$. De manière à satisfaire cette condition, nous choisissons

$$\Delta\tau(x) = \left(\sum_{i=1}^2 |f_i(x, a_0)|/h_i \right)^{-1},$$

où a_0 est le contrôle optimal¹⁹ de (11). Nous pouvons alors démontrer²⁰ la stabilité de notre schéma :

Proposition 1 *S'il existe δ et M tels que $\forall x \in \bar{\Omega}$, $0 < \delta \leq I(x) \leq M$, alors le schéma S est stable.*

Convergence vers la solution de viscosité. Par construction, notre schéma (13) est consistant¹⁸ avec l'équation de SFS (9) dès que l'intensité de l'image I est Lipschitzienne. Donc, en utilisant la stabilité de notre schéma, sa monotonie et l'unicité de la solution de l'équation de SFS (9), il découle directement de [3] que les solutions de notre schéma d'approximation (13) convergent²⁰ vers l'unique solution de viscosité de l'équation (9) (lorsque la taille de la grille diminue). Ce résultat démontre²⁰ également l'existence de la solution de viscosité de l'équation (9).

5.2 Algorithme numérique

Nous décrivons maintenant un *algorithme itératif* qui calcule une approximation des solutions de notre schéma (13) pour tout $\rho = (h_1, h_2)$ fixé. Nous notons, pour $k \in \mathbb{Z}^2$, $x_k = (k_1 h_1, k_2 h_2)$, et $Q := \{k \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } x_k \in \bar{\Omega}\}$. Nous appelons "pixel" un point x_k dans $\bar{\Omega}$. $\bar{\Omega}$ étant borné, le nombre de pixels est fini. L'algorithme suivant calcule pour tout $k \in Q$ une suite d'approximations U_k^n de $u(x_k)$:

Algorithme:

1. *Initialisation* ($n = 0$) : $\forall k \in Q$, $U_k^0 = u_0(x_k)$;
2. *Choix d'un pixel x_k et modification (pas $n + 1$) de U_k^n : nous choisissons U_k^{n+1} tel que*

$$\begin{cases} U_l^{n+1} = U_l^n & \text{si } l \neq k, \\ S(\rho, x_k, U_k^{n+1}, U^n) = 0; \end{cases}$$

3. *Choisir le pixel suivant x_k (en utilisant un scan alternatif similaire à [6]) puis retourner à l'étape 2.*

Si $u_0(x) = -\frac{1}{2} \ln(I(x)f^2)$ alors nous pouvons démontrer²⁰ que l'étape 2 de l'algorithme possède toujours une unique solution et que les solutions numériques calculées convergent (lorsque $n \rightarrow +\infty$) vers les solutions du schéma. Tous les détails sur l'implémentation de l'algorithme se trouvent dans [30, 23].

6 Résultats expérimentaux

Dans toutes les expériences suivantes, nous n'avons utilisé aucune donnée additionnelle et nous n'avons fixé la valeur de la solution à aucun point. Notre

¹⁹c-a-d le a dans A pour lequel le maximum de (11) est atteint.

²⁰ Par manque de place, nous ne pouvons développer cette preuve ici ; tous les détails se trouvent dans [30, 23].

algorithme étant itératif, il nécessite un *critère d'arrêt*. Nous avons choisi d'arrêter les itérations lorsque $\frac{1}{\text{card}(Q)} \sum_{k \in Q} |U_k^{n+1} - U_k^n| \leq s$, où $\text{card}(Q)$ est le nombre de pixels. Dans la pratique, nous avons fixé $s = 10^{-10}$. Dans les résultats exposés par la suite, n_s correspond au nombre d'itérations nécessaires pour atteindre ce seuil.

6.1 Expériences avec des images synthétiques

Dans la Figure 7, nous montrons l'objet initial en a), l'image obtenue à partir de l'objet initial en b) et la surface reconstruite en c). Rappelons que l'une des avancées les plus significatives de notre méthode est de pouvoir retrouver des surfaces comportant *plusieurs minima locaux sans donnée additionnelle* contrairement aux autres méthodes de propagation/EDP (voir par exemple [12, 31, 7, 14, 15, 28]) ; lesquelles nécessitent la connaissance des valeurs de la solution aux minima locaux ou des conditions au bord plus fortes. Nous avons tout d'abord testé notre algorithme avec des images synthétisées à partir de surfaces contenant *plusieurs minima locaux*, par exemple, le champ de bosses affiché dans la première ligne de la Figure 7. Ce résultat est plus que satisfaisant. La deuxième ligne de la Figure 7 affiche le résultat de notre algorithme à partir d'une image du visage classique de Mozart [36]. Dans [28], Prados et Faugeras ont besoin de fixer la hauteur du point singulier situé sur le bout du nez pour obtenir une solution relativement satisfaisante. Ici sans aucune information, nous obtenons un résultat sans précédent.

De manière à tester la capacité de notre algorithme à traiter les images discontinues et les surfaces non différentiables, nous l'avons appliqué à des images synthétiques générées par des formes contenant différentes arêtes. Expérimentalement, nous avons noté que les reconstructions semblent parfaites lorsque les maxima locaux²¹ sont différentiables²². Les troisième et quatrième lignes de la Figure 7 montrent deux exemples de reconstruction de surfaces contenant diverses sortes d'arêtes. Dans ce cas, la reconstruction est très satisfaisante (mais pas parfaite, dans le cas de la ligne IV où les maxima locaux sont non différentiables). Notons que les méthodes globales de Dupuis et Oliensis [20] et de Kimmel et Bruckstein [13] sont incapables de traiter de telles surfaces non différentiables.

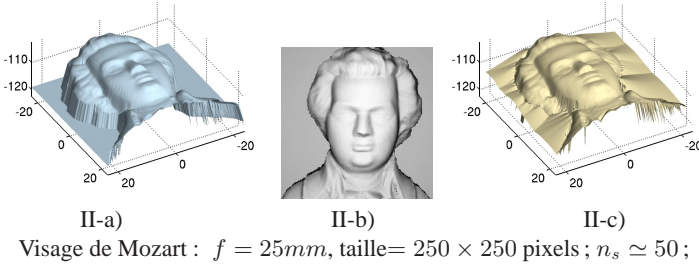
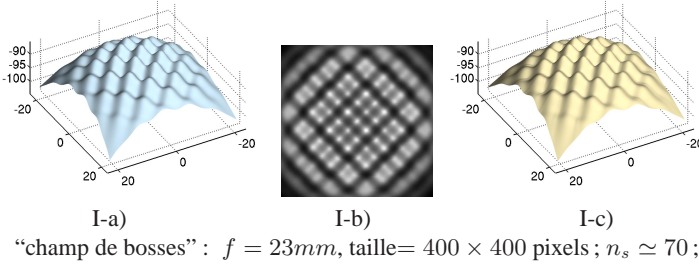
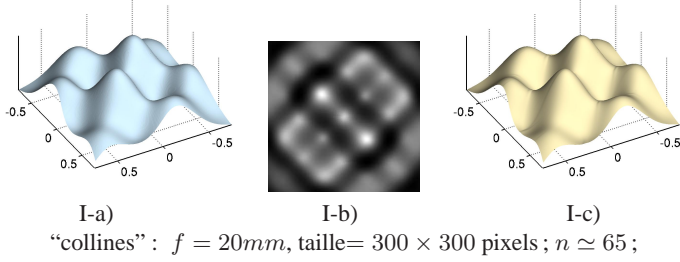
De manière à démontrer que notre méthode s'applique en pratique, nous avons montré la stabilité de notre algorithme par rapport à trois types d'erreurs : 1) erreurs d'intensité de l'image dues à des bruits blancs uniformément distribués ; 2) erreurs sur le facteur gamma ; 3) estimation incorrecte de la focale f de l'appareil photographique. Notons que nous pouvons démontrer²⁰ que les erreurs sur le paramètre σ ²³ entraînent simplement des chan-

²¹ Les maxima de la surface visualisée correspondent approximativement aux minima du module de profondeur. La surface est sous le centre optique.

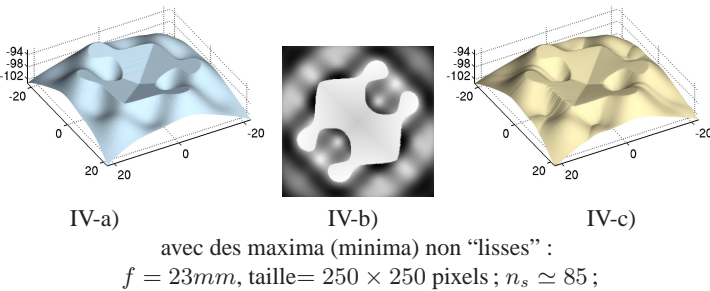
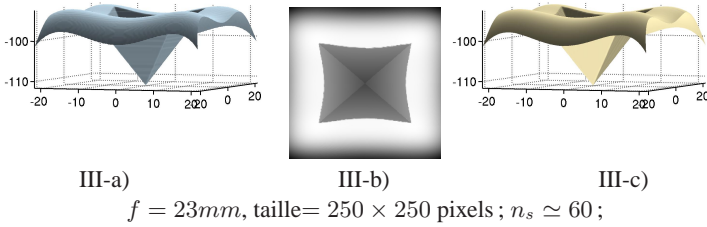
²² Voir [30] pour plus d'exemples numériques...

²³ Erreurs faites sur les paramètres de l'appareil et de l'intensité de la

**Résultats pour une image
d'une surface avec plusieurs minima locaux :**

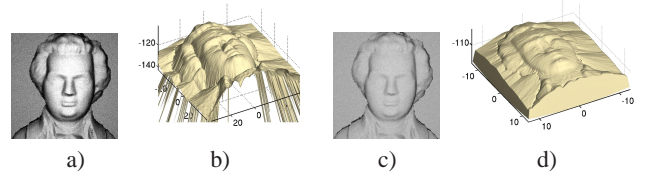


Résultats pour une image contenant des discontinuités



a) surface initiale ; b) image obtenue à partir de la surface initiale
a) : c) surface reconstruite à partir de l'image b).

FIG. 7 – Exemples de résultats avec des images synthétiques.



a) image de la Fig.7-II-b) bruitée ($SNR = 4.04$), avec un gamma ($\gamma = 2$) et un albedo corrompu ($\sigma_\epsilon = 1.2\sigma$) ; b) surface reconstruite à partir de l'image a) avec une mauvaise distance focale en paramètre $f_\epsilon = 15mm$ (la correcte est $f = 25mm$).
c) image bruitée avec $SNR = 3.36$, $\gamma = 0.5$, $\sigma_\epsilon = 0.8\sigma$;
d) surface reconstruite à partir de c) avec $f_\epsilon = 45mm$.

FIG. 8 – Résultats pour l'image du visage de Mozart bruitée, par un gamma corrompu, par des erreurs d'albedo, avec une mauvaise distance focale en paramètre

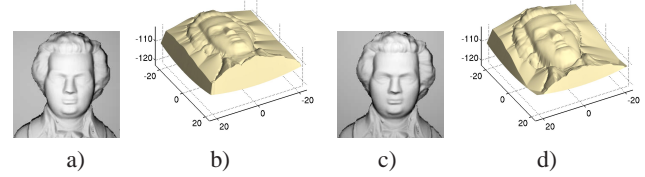


FIG. 9 – Surfaces reconstruites à partir d'images synthétiques avec une source de lumière située à $10cm$ à gauche et $20cm$ au-dessus du centre optique.

gements d'échelle. La Figure 8 montre les résultats obtenus à partir de l'image Fig.7-II-b) du visage de Mozart légèrement déformée par du bruit, des corrections gamma, des erreurs d'albedo et avec une mauvaise focale. En plus des effets d'accumulation, notons que les erreurs imposées sont quantitativement assez importantes. Étonnemment, l'algorithme retourne des résultats relativement satisfaisants étant donné les grandes différences entre l'image initiale et les images utilisées. D'autre part, en pratique avec des images réelles, la source de lumière n'est jamais située exactement au centre optique. Pour un appareil photographique équipé d'un flash, la source de lumière est située à quelques centimètres du centre optique. La Figure 9 montre la robustesse de notre méthode face à ce type d'erreurs : elle montre la reconstruction obtenue à partir des images du visage de Mozart synthétisées avec une source de lumière située à $10cm$ à gauche et $20cm$ au-dessus du centre optique. De nombreuses expériences supplémentaires sont données dans [30, 23].

6.2 Résultats expérimentaux sur des images réelles

Nous avons testé notre nouvel algorithme sur une base de données d'images réelles de visages vérifiant approximativement nos hypothèses de modélisation. Cette base de données est disponible en ligne²⁴ et illustrée en partie dans la Figure 11. Pour toutes ces images, la taille des pixels est estimée à $0.018 \times 0.018mm^2$ (la taille des images est 512×384 pixels) ; la focale est $5.8mm$. Dans ces tests nous

source de lumière.

²⁴<http://www-sop.inria.fr/odyssee/team/Emmanuel.Prados/>

avons fixé²⁵ $\sigma = 1000$ et nous n'avons pas fait de correction gamma. Notre modélisation du problème suppose que la scène est Lambertienne et que l'albedo est constant. A cause de la couleur des yeux, par exemple, cette hypothèse n'est pas valable. Pour en minimiser les effets, nous les avons donc peints manuellement²⁶. Dans la Figure 10, nous présentons un exemple typique de reconstructions vu sous divers points de vue et avec différentes illuminations. Dans la Figure 11, nous montrons un ensemble de reconstructions obtenues à partir de notre base de données. La surface reconstruite est affichée à droite de l'image correspondante. Pour plus de détails, voir [30, 23]. Insistons encore sur le fait que contrairement à toutes²⁷ les autres méthodes d'EDP (qui sont basées sur la modélisation classique du SFS, par exemple [12, 31, 7, 28]; et contrairement à [17]), dans les expériences présentées ici, mise à part l'intensité de l'image, nous n'utilisons aucune donnée additionnelle (exceptés les paramètres intrinsèques de l'appareil photographique; focale et taille des pixels). Par exemple, contrairement à [27] qui traite également les images réelles de visages, nous n'avons plus besoin de fixer la hauteur du point singulier situé sur le nez.

7 Conclusion

Les principales difficultés rencontrées en SFS sont dues à la nature mal posée du problème. Ici, nous avons démontré que ces difficultés disparaissent complètement quand nous modélisons le problème de manière différente de celle classiquement proposée. Plus précisément, nous avons donné un exemple de modélisation pour lequel le problème du SFS est complètement bien posé. En d'autres termes, nous avons en quelque sorte démontré que dans les précédents travaux sur le SFS, le problème est mal posé en raison d'une trop grande simplification dans la modélisation. Plus précisément, après avoir détaillé une nouvelle équation (explicite) pour le SFS, nous avons développé une **étude mathématique complète** de ses solutions (en particulier, nous avons prouvé qu'elle est **unique**), puis nous avons proposé une méthode numérique **dont on prouve la convergence**. Notre méthode ne nécessite ni données additionnelles (contrairement par exemple à [12, 31, 7, 15, 28, 17]) ni hypothèses de régularité (contrairement par exemple aux méthodes globales [20, 13]). Enfin, nous avons **testé notre nouvel algorithme avec succès** sur des images synthétiques et **réelles**.

²⁵Rappelons que les erreurs sur le paramètre σ n'entraînent seulement qu'un changement d'échelle.

²⁶Cette étape peut se faire automatiquement en faisant correspondre par exemple l'image à un modèle d'image déjà segmenté; voir par exemple [10]. Ensuite nous pouvons utiliser une méthode d'"inpainting" semblable à [34] par exemple.

²⁷A l'exception des méthodes globales [20, 13] qui nécessitent d'importantes hypothèses de régularité non réalistes et non vérifiées en pratique...

Références

- [1] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Birkhauser, 1997.
- [2] G. Barles. *Solutions de Viscosité des Equations de Hamilton-Jacobi*. Springer-Verlag, 1994.
- [3] G. Barles and P.E. Souganidis. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. *Asymptotic Analysis*, 4 :271–283, 1991.
- [4] P. N. Belhumeur, D. J. Kriegman, and A. L. Yuille. The bas-relief ambiguity. *IJCV*, 35(1) :33–44, November 1999.
- [5] F. Courteille, A. Crouzil, J.-D. Durou, and P. Gurdjos. Shape from Shading en conditions réalistes d'acquisition photographique. In *Proceedings of RFIA'04*, 2004.
- [6] P.-E. Danielsson. Euclidean Distance Mapping. *Computer Graphics and Image Processing*, 14(3) :227–248, 1980.
- [7] P. Dupuis and J. Oliensis. An optimal control formulation and related numerical methods for a problem in shape reconstruction. *The Annals of Applied Probability*, 4(2) :287–346, 1994.
- [8] J-D. Durou, M. Falcone, and M. Sagona. A survey of numerical methods for shape from shading. Research report 2004-2-R, IRIT, January 2004.
- [9] J.-D. Durou and D. Piau. Ambiguous shape from shading with critical points. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 12(2) :99–108, 2000.
- [10] G. Hermosillo and O. Faugeras. Dense image matching with global and local statistical criteria : a variational approach. In *CVPR*, 2001.
- [11] B.K. Horn. *Robot Vision*. MIT Press, 1986.
- [12] B.K.P. Horn. Obtaining shape from shading information. In *The Psychology of Computer Vision*. McGraw-Hill, 1975.
- [13] R. Kimmel and A.M. Bruckstein. "Global shape-from-shading". *CVGIP : Image Understanding*, pages 360–369, 1995.
- [14] R. Kimmel and A.M. Bruckstein. Tracking level sets by level sets : A method for solving the shape from shading problem. *CVIU*, 62(2) :47–58, July 1995.
- [15] R. Kimmel and J.A. Sethian. Optimal algorithm for shape from shading and path planning. *JMIV*, 14(2) :237–244, May 2001.
- [16] K.M. Lee and C.C.J. Kuo. Shape from shading with a generalized reflectance map model. *CVIU*, 67(2) :143–160, August 1997.
- [17] T. Okatani and K. Deguchi. Shape reconstruction from an endoscope image by shape from shading technique for a point light source at the projection center. *Computer Vision and Image Understanding*, 66(2) :119–131, May 1997.
- [18] T. Okatani and K. Deguchi. On classification of singular points for global shape from shading. In *Proceedings of the 3rd Asian Conference on Computer Vision*, volume 1351, pages 48–55, Hong Kong, January 1998. springer-verlag.
- [19] J. Oliensis. Shape from shading as a partially well-constrained problem. *CVGIP : Image Understanding*, 54(2) :163–183, 1991.

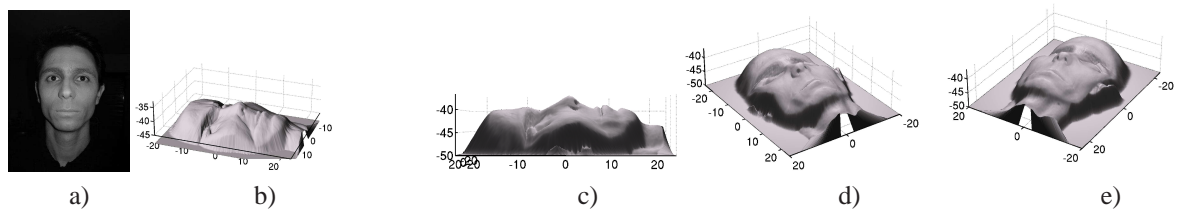


FIG. 10 – Un exemple de reconstruction à partir d'une (unique) image réelle de visage.

a) photo initiale (512×384), b) surface reconstruite à partir de a). c)-d)-e) Surface b) illuminée par une unique source de lumière placée au centre optique (0,0,0) et visualisée selon différents points de vue.

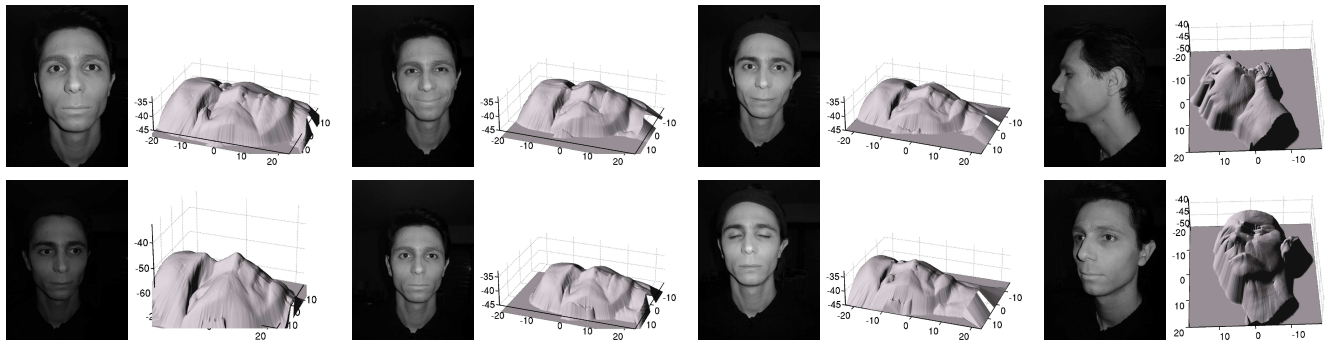


FIG. 11 – Exemples de reconstructions à partir d'images réelles de visages.

- [20] J. Oliensis and P. Dupuis. A global algorithm for shape from shading. In *Proceedings of ICCV'93*, pages 692–701, 1993.
- [21] S. Osher and J. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on the Hamilton–Jacobi formulation. *Journal of Comput. Physics*, 79 :12–49, 1988.
- [22] A. Pentland. Local shading analysis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6 :170–187, 1984.
- [23] E. Prados. *Application of the theory of the viscosity solutions to the Shape From Shading problem*. PhD thesis, Univ. of Nice-Sophia Antipolis, 2004.
- [24] E. Prados, F. Camilli, and O. Faugeras. A unifying and rigorous shape from shading method adapted to realistic data and applications. *To appear in JMIV*, 2005.
- [25] E. Prados, F. Camilli, and O. Faugeras. A viscosity solution method for shape-from-shading without boundary data. *Submitted to ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2005.
- [26] E. Prados and O. Faugeras. Reconstruction photogrammétrique des formes 3D ; nouveaux résultats théoriques et nouveaux algorithmes pour des projections orthographe et en perspective. In *Proceedings of RFIA'04*, January 2004.
- [27] E. Prados and O. Faugeras. A rigorous and realistic shape from shading method and some of its applications. Technical Report 5133, INRIA, March 2004.
- [28] E. Prados and O. Faugeras. Unifying approaches and removing unrealistic assumptions in Shape from Shading : Mathematics can help. In *Proceedings of ECCV'04*, 2004.
- [29] E. Prados and O. Faugeras. A generic and provably convergent shape-from-shading method for orthographic and pinhole cameras. *à paraître dans IJCV*, 2005.
- [30] E. Prados, O. Faugeras, and F. Camilli. Shape from shading : a well-posed problem ? Technical Report RR-5297, INRIA, August 2004.
- [31] E. Rouy and A. Tourin. A Viscosity Solutions Approach to Shape-from-Shading. *SIAM Num. An.*, 29(3) :867–884, June 1992.
- [32] A. Tankus, N. Sochen, and Y. Yeshurun. A new perspective [on] Shape-from-Shading. In *Proceedings of the 9th International Conference on Computer Vision*, volume 2, pages 862–869, Nice, France, October 2003. IEEE Computer Society, IEEE Computer Society Press.
- [33] A. Tankus, N. Sochen, and Y. Yeshurun. Perspective Shape-from-Shading by Fast Marching. In *CVPR'04*, 2004.
- [34] D. Tschumperlé and R. Deriche. Vector-valued image regularization with PDE's : A common framework for different applications. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Madison, Wisconsin (United States), June 2003.
- [35] S.Y. Yuen, Y.Y. Tsui, Y.W. Leung, and R.M.M. Chen. Fast marching method for shape from shading under perspective projection. In *Proceedings of VIIP'02*, pages 584–589, 2002.
- [36] R. Zhang, P.-S. Tsai, J.-E. Cryer, and M. Shah. Shape from Shading : A survey. *IEEE Transactions on PAMI*, 21(8) :690–706, August 1999.