Annexe A

Propriétés de l'algorithme EM

Saluer ce qui va pour mieux dire
ce qui ne va pas.

Cet annexe présente une étude sur la croissance de la vraisemblance et la convergence de l'algorithme itératif EM et ses variantes. On conserve ici les mêmes notations utilisées dans la section 3.6.3.2.

A.1 Croissance de la vraisemblance

Cette procédure a pour propriété fondamentale de faire croître la vraisemblance des paramètres au cours des itérations [60]. Pour le voir, notons d'abord que

$$\begin{aligned} Q(\theta, \theta^m) &= \Big\langle \log f(z \mid y, \theta) + \log f(y \mid \theta) \mid y, \theta^m \Big\rangle \\ &= \underbrace{\log f(y \mid \theta)}_{L(\theta)} + \underbrace{\Big\langle \log f(z \mid y, \theta) \mid y, \theta^m \Big\rangle}_{H(\theta, \theta^m)} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow L(\theta) = Q(\theta, \theta^m) - H(\theta, \theta^m)$$

Or, la fonction $H(\theta, \theta^m)$ possède une propriété intéressante :

$$\forall \theta \quad H(\theta, \theta^m) \leq H(\theta^m, \theta^m) \tag{A.1}$$

qui découle de l'inégalité de Jensen [31]. On peut également retrouver la relation A.1 en remarquant que

$$H(\theta, \theta^m) - H(\theta^m, \theta^m) = \sum_{z \in \mho} f(z \mid y, \theta^m) - \log \frac{f(z \mid y, \theta)}{f(z \mid y, \theta^m)}$$

où $\mho$ désigne l'ensemble des valeurs que peut prendre la vecteur aléatoire z (cas non continu). Comme $\forall x \in I\!R, \log(x) \leq x - 1$, on peut dire que $\forall z \in \mho$,

$$\log \frac{f(z \mid y, \theta}{f(z \mid y, \theta^m} \leq \frac{f(z \mid y, \theta}{f(z \mid y, \theta^m} - 1$$

donc

$$H(\theta, \theta^m) - H(\theta^m, \theta^m) \leq \underbrace{\sum_z f(z \mid y, \theta)}_{1} - \underbrace{\sum_z f(z \mid y, \theta^m)}_{1} = 0$$

d'où l'inégalité A.1. De plus, comme $\log(x) = x - 1$ si et seulement si $x = 1$, il y a égalité si et seulement si $\forall z \in \mho, f(z \mid y, \theta) = f(z \mid y, \theta^m)$. L'inégalité A.1 permet d'écrire que

$$H(\theta^{m+1}, \theta^m) \leq H(\theta^m, \theta^m).$$

Comme par ailleurs θ^{m+1} maximise $Q(\theta, \theta^m)$, on a

$$Q(\theta^{m+1}, \theta^m) \geq Q(\theta^m, \theta^m)$$

d'où

$$L(\theta^{m+1}) = Q(\theta^{m+1}, \theta^m) - H(\theta^{m+1}, \theta^m) \geq Q(\theta^m, \theta^m) - H(\theta^m, \theta^m) = L(\theta^m)$$

Notons que cette propriété de croissance de la vraisemblance reste vérifiée si l'on se contente de mettre à jour les paramètres θ^{m+1} pour que $Q(\theta^{m+1}, \theta^m) \geq Q(\theta^m, \theta^m)$.

A.2 Convergence de EM

Le concept de EM se base sur le fait que la valeur θ^* maximisant la vraisemblance $L(\theta)$ constitue un point fixe de la fonction F qui met à jour les paramètres d'une itération de EM. Cette fonction peut être définie comme

$$F : \theta^0 \mapsto \arg\max_\theta Q(\theta, \theta^0).$$

En effet, en posant

$$\theta^* = \arg\max_\theta L(\theta)$$

on remarque que d'après l'équation A.1,

$$\theta^* = \arg\max_\theta H(\theta, \theta^*)$$

donc

$$\begin{aligned}\theta^* &= \arg\max_\theta \underbrace{L(\theta) + H(\theta, \theta^*)}_{Q(\theta,\theta^*)} \\ &= F(\theta^*).\end{aligned}$$

Dempster et al. [31] montre que les points fixes de l'algorithme EM correspondent à des points stationnaires de la vraisemblance. Quant à la convergence de l'algorithme, elle a été étudiée pour des classes de problèmes particuliers. Une étude détaillée de la convergence de EM est mené par Wu [125].

Annexe B

Séquence "Dances with Wolves"

Saluer ce qui va pour mieux dire
ce qui ne va pas.

Les plans vidéo illustrés dans les figures B.1 et B.2 sont extraits du film "Dances with wolves" par la méthode de Ardebilian et al. [4]. Cette séquence a été préparée dans le laboratoire Heudiasyc de l'Université de Technologie de Compiègne. Ne possédant que des images médianes des 70 plans, certaines images contenant des objets d'intérêts ont été segmentées manuellement.

Cette séquence a été utilisée dans la validation expérimentale de l'approche de macro-segmentation proposée dans le chapitre 7. Une macro-segmentation manuelle de cette séquence permet d'identifier les sept scènes suivantes :

- scène 1 du plan 1 jusqu'à le plan 29
- scène 2 comporte seulement le plan 30
- scène 3 du plan 31 jusqu'à le plan 47
- scène 4 du plan 48 jusqu'à le plan 51
- scène 5 comporte seulement le plan 52
- scène 6 du plan 53 jusqu'à le plan 67
- scène 7 du plan 68 jusqu'à le plan 70

FIG. B.1: *Plans de la séquence "Dances with wolves"*

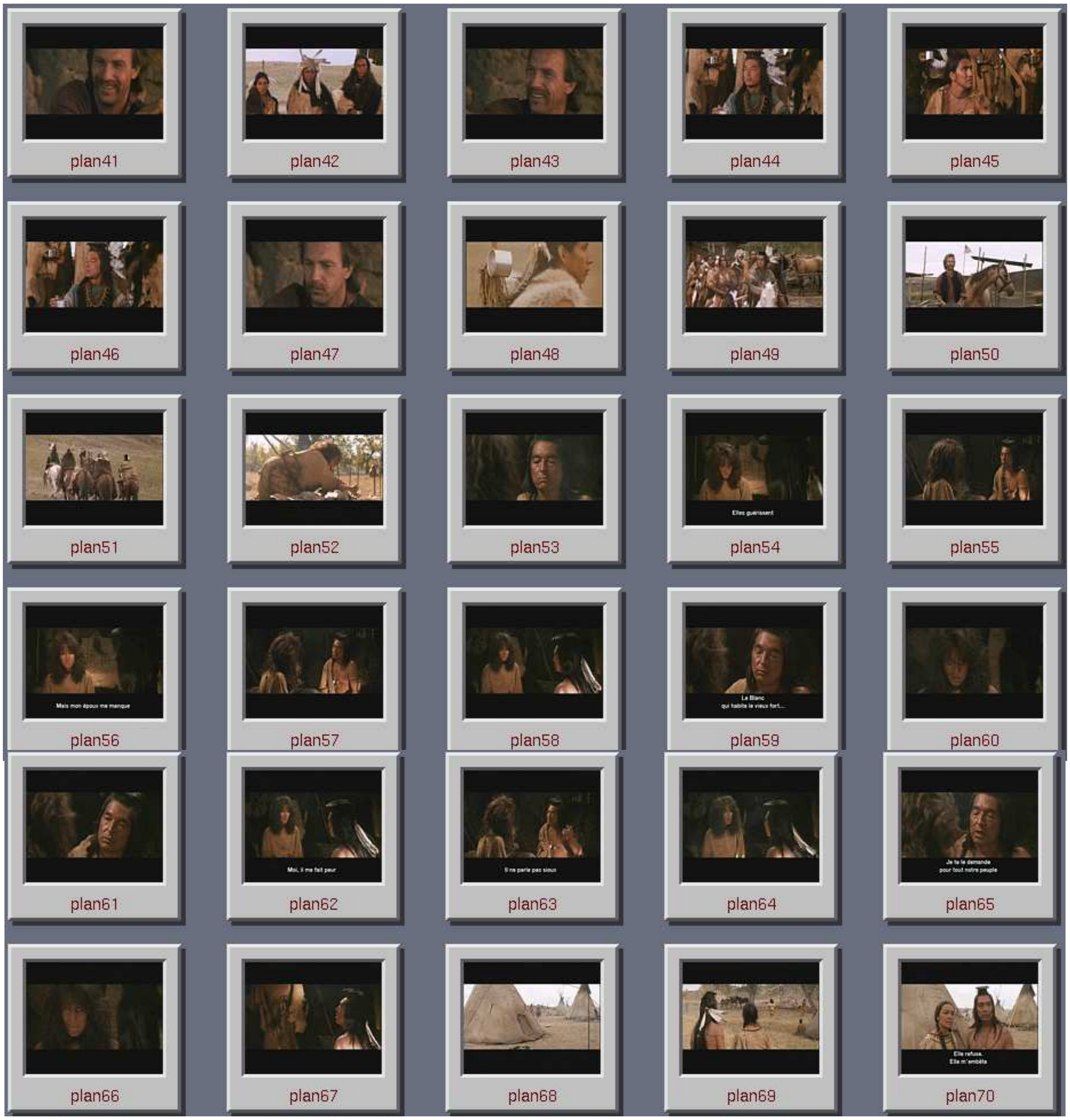

FIG. B.2: *Plans de la séquence "Dances with wolves" (suite)*